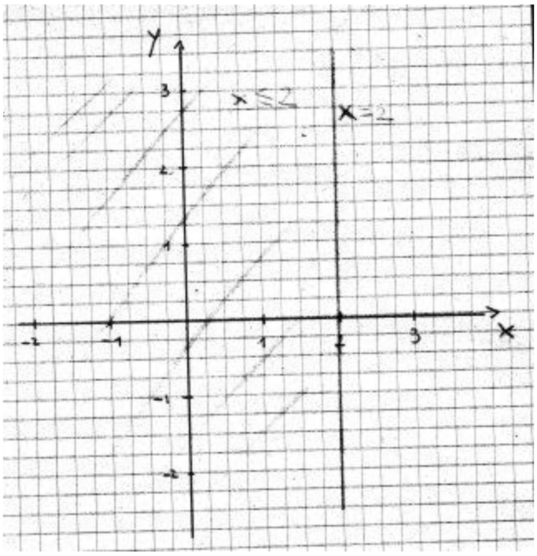
Le coordinate di insiemi di punti

Esercizio 1

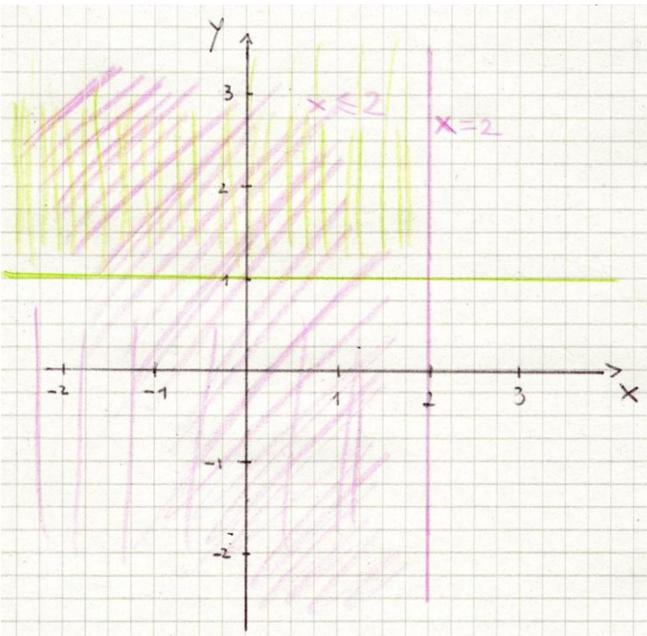
In un riferimento cartesiano disegna :
a) l'insieme A dei punti (x; y) con ascissa x ≤2;
b) l'insieme B dei punti (x; y) con ordinata y ≥ 1;
c) l'insieme A ∩ B.

Tracciamo innanzitutto gli assi cartesiani e su di essi fissiamo un sistema di numerazione.

Disegniamo poi la retta parallela all'asse y, di equazione x=2 ed individuiamo l'insieme dei punti richiesto. Sono tutti quelli A SINISTRA della retta disegnata, che è COMPRESA nell'insieme.



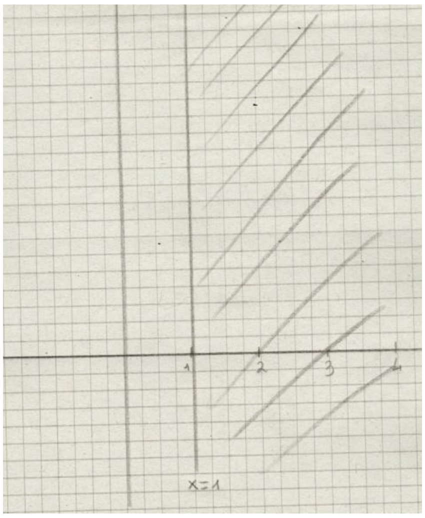
Passiamo ora a disegnare la retta parallela all'asse x di equazione y=1. Disegniamo poi l'insieme dei punti di ORDINATA MAGGIORE O UGUALE a 1. Sono tutti quelli AL DI SOPRA della retta y=1, retta compresa. L'insieme intersezione è quello in cui sono SODDISFATTE ENTRAMBE le diseguaglianze, dove quindi compaiono entrambi i colori. A ∩ B = $\{x \leq 2, y \geq 1\}$



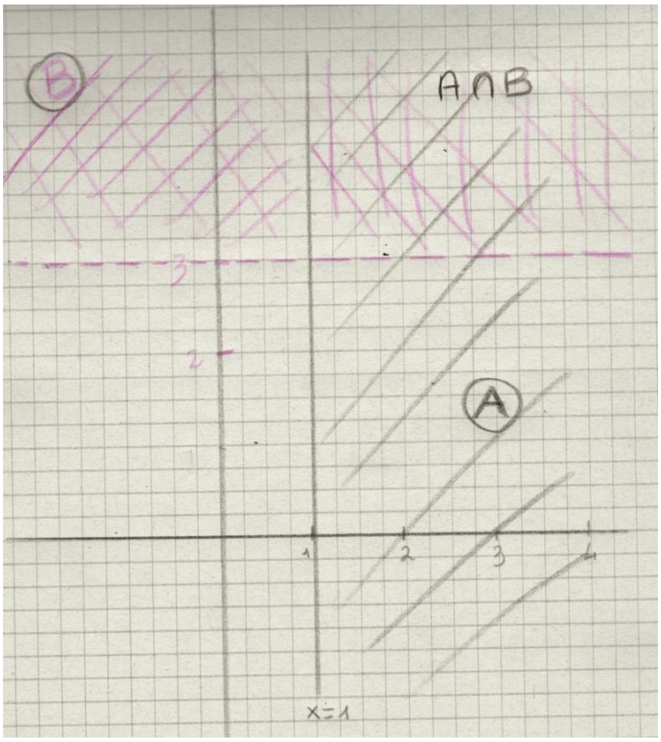
Esercizio 2

In un riferimento cartesiano, A è l’insieme dei punti che hanno ascissa x ≥1, B è l’insieme dei punti che hanno ordinata y > 3. Disegna A ∩ B.
Tracciamo gli assi cartesiani e su di essi fissiamo un sistema di numerazione.

Disegniamo poi la retta parallela all'asse y, di equazione x=1 ed individuiamo l'insieme dei punti richiesto. Sono tutti quelli A DESTRA della retta disegnata, che è COMPRESA nell'insieme.



Analogamente, l'insieme B è formato dai punti AL DI SOPRA della retta y = 3, che NON è COMPRESA (è tratteggiata). L'insieme intersezione è formato dalla regione in cui i due insiemi SI SOVRAPPONGONO



Esercizio 3

In un riferimento cartesiano, A è l'insieme dei punti che hanno ascissa x tale che |x - 1| < 6 e B è l'insieme dei punti che hanno ordinata y tale che - 1 ≤ y < 8. Disegna A∩B.

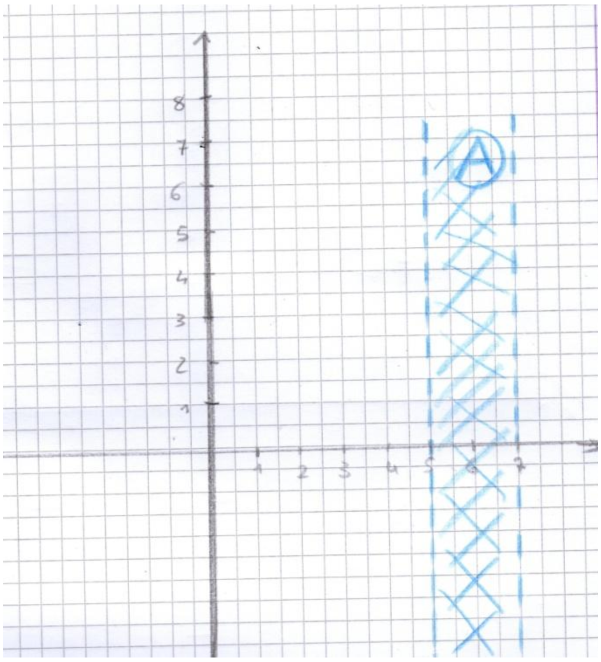
Per disegnare l'insieme A, dobbiamo studiare il segno del valore assoluto.
Sappiamo che il valore assoluto di un'espressione coincide con l'espressione se questa è positiva o nulla, con il suo opposto se è negativa.
Nel nostro caso abbiamo

$$x - 1 \geq 0 \text{ se } x \geq 1$$

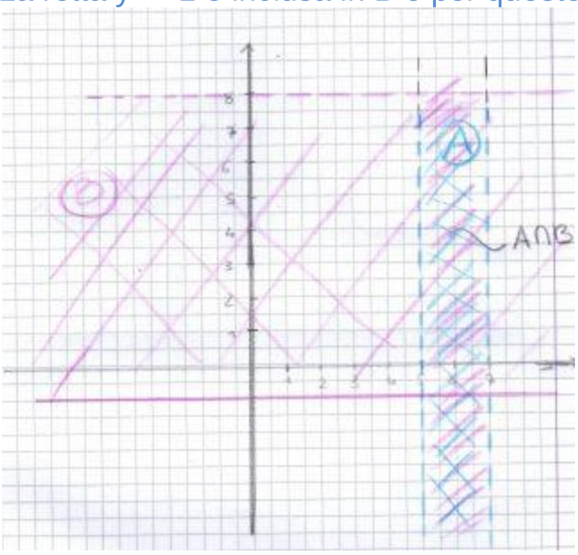
Per x < 1, invece, il valore assoluto diventa

$$-x + 1$$

Dobbiamo quindi risolvere due disequazioni:
x-1 <6 ➔ x <7 x ≥ 1
-x +1 <6 ➔ -x < 5 ➔ x >5 x < 1
L'insieme A è quindi rappresentato dalla striscia di piano compresa tra le rette di equazione x=5 e x=7



Disegniamo ora le due rette parallele all'asse x, di equazione y = -1 e y = 8, che individuano la striscia di piano dell'insieme B.
La retta y = -1 è inclusa in B e per questo è a linea continua.

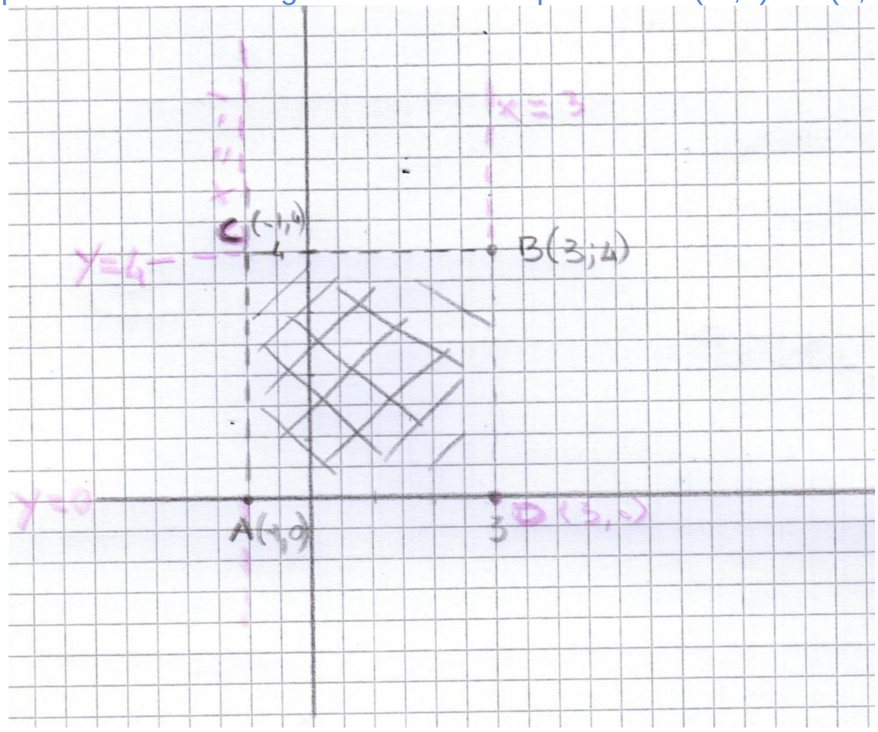


L'insieme intersezione è il rettangolo compreso tra le rette y= -1, y = 8, x = 5, x = 7

Esercizio 4

Dato il punto A = (√a-1; a/2 -1) trova per quali valori di a il punto è interno al quadrato che ha i lati paralleli agli assi cartesiani e ha due vertici di coordinate (-1; 0) e (3; 4).

Disegniamo innanzitutto il quadrato. Per individuarlo, segniamo i due punti A(-1, 0) e B (3,4). Tracciamo poi le parallele agli assi che passano per i due punti per delimitare lo spazio della figura geometrica.
Individuiamo in questo modo anche gli altri vertici del quadrato: C(-1;4) e D(3;0)



Le coordinate del punto devono quindi essere comprese nello spazio individuato dalle rette di coordinate y= 0, y = 4, x = - 1 e x = 3.
Deve cioè essere :
per l'ascissa : -1 ≤ √(a-1) ≤ 3
per l'ordinata : 0 ≤ a/2 -1 ≤ 4

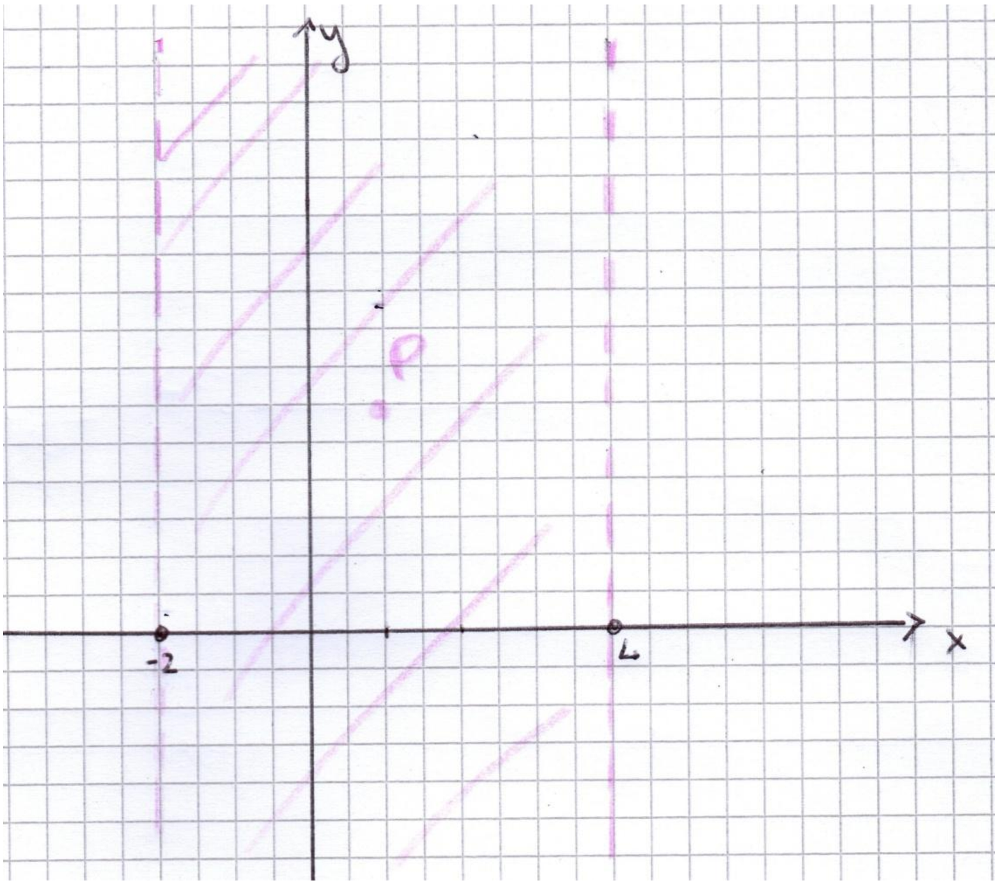
Dalla prima otteniamo 2 ≤ a ≤ 8
Dalla seconda otteniamo 2 ≤ a ≤ 10

Ovvero 2≤ a ≤ 8

Esercizio 5

Calcola per quali valori di a il punto P(|a + 1|; a - 4) appartiene alla striscia individuata dalle parallele all'asse y passanti per A(-2; 0) e B(4; 0).

Individuiamo innanzi tutto i due punti e poi tracciamo le rette parallele all'asse y che passano per i due punti dati. Sono le rette y=-2 e y = 4, che individuano la striscia evidenziata in figura. Perché il punto P appartenga alla striscia data, deve essere la sua coordinata x compresa tra -2 e 4:
- 2 ≤ |a + 1| ≤ 4



Per risolvere le due diseguaglianze, dobbiamo studiare il segno del valore assoluto:
Sappiamo che $a+1 \geq 0$ per $a \geq -1$
Invece per $a \leq -1$ la relazione diventa $-a-1$
Perché il punto P appartenga alla striscia individuata dalle rette $y = -2$ e $y = 4$, deve essere:

- $-2 \leq a+1 \leq 4$
- $a \geq -1$

a) $-2 \leq -a-1 \leq 4$
b) $a \leq -1$

Risolviamo i due sistemi e uniamo poi le loro soluzioni.

SISTEMA 1:

- $a + 1 \geq -2$
- $a + 1 \leq 4$
- $a \geq -1$

Da cui ricaviamo $-1 \leq a \leq 3$

SISTEMA 2 :

- $-a-1 \geq -2$
- $-a-1 \leq 4$
- $a \leq -1$

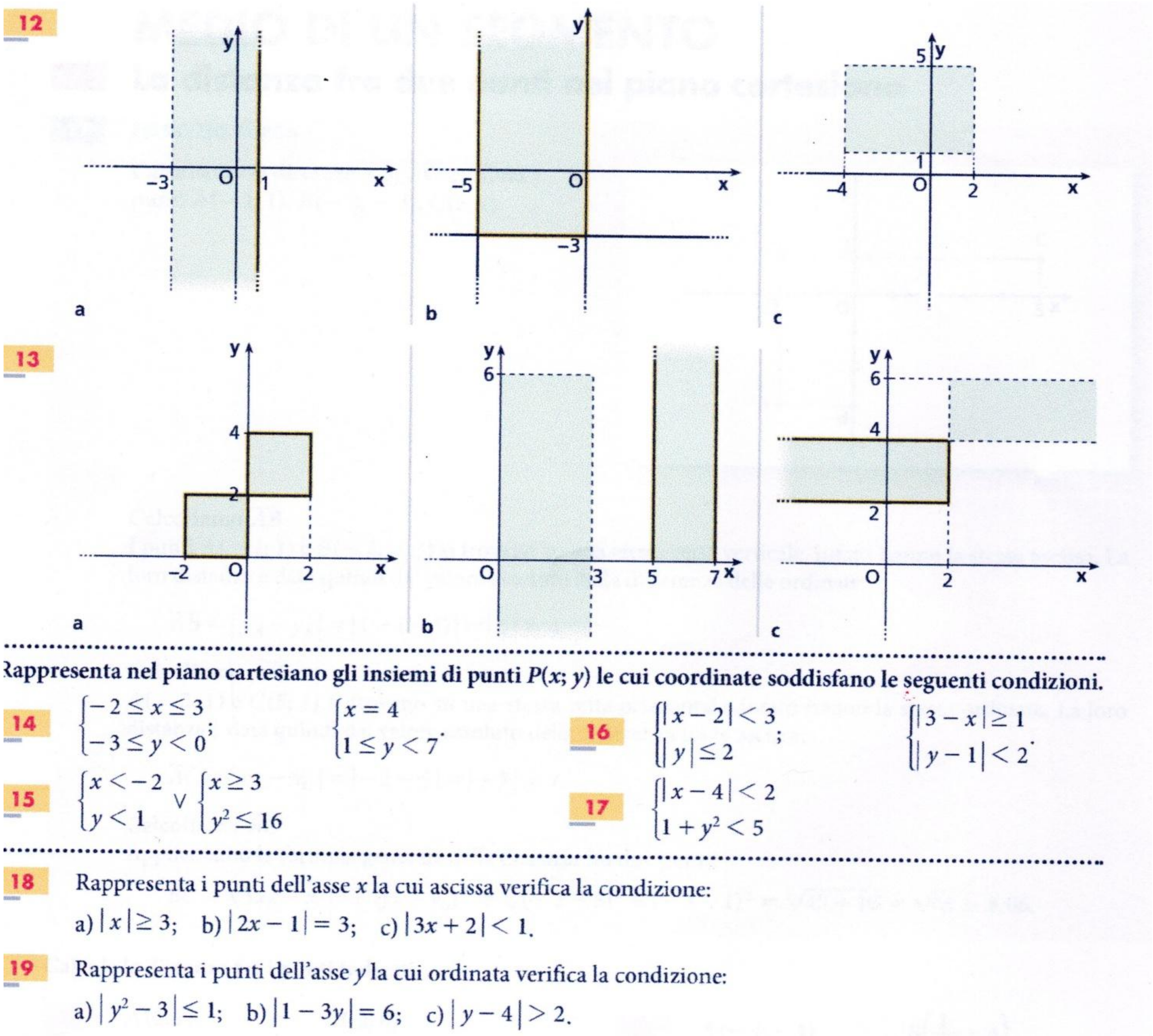
Risolvendo il sistema 2 otteniamo -5 ≤ a ≤ -1

Unendo le soluzioni otteniamo

-5≤ a ≤ 3

Esercizio 6

Descrivi gli insiemi disegnati nelle seguenti figure, usando opportune disequazioni.



12

13

Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di punti $P(x; y)$ le cui coordinate soddisfano le seguenti condizioni.

14 $\begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ -3 \le y < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 \\ 1 \le y < 7 \end{cases}$.

15 $\begin{cases} x < -2 \\ y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ y^2 \le 16 \end{cases}$

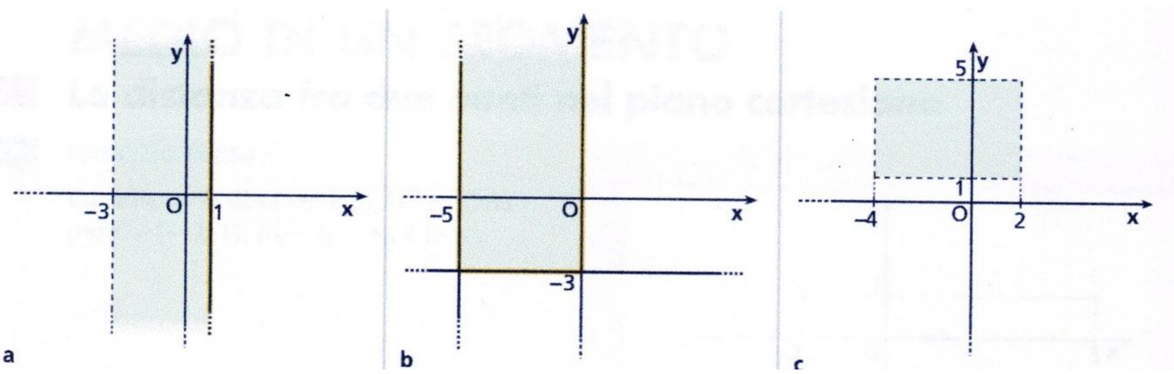
16 $\begin{cases} |x-2| < 3 \\ |y| \le 2 \end{cases}$; $\begin{cases} |3-x| \ge 1 \\ |y-1| < 2 \end{cases}$.

17 $\begin{cases} |x-4| < 2 \\ 1 + y^2 < 5 \end{cases}$

18 Rappresenta i punti dell'asse x la cui ascissa verifica la condizione:
a) $|x| \ge 3$; b) $|2x-1| = 3$; c) $|3x+2| < 1$.

19 Rappresenta i punti dell'asse y la cui ordinata verifica la condizione:
a) $|y^2 - 3| \le 1$; b) $|1-3y| = 6$; c) $|y-4| > 2$.

Per l'esercizio 12 abbiamo

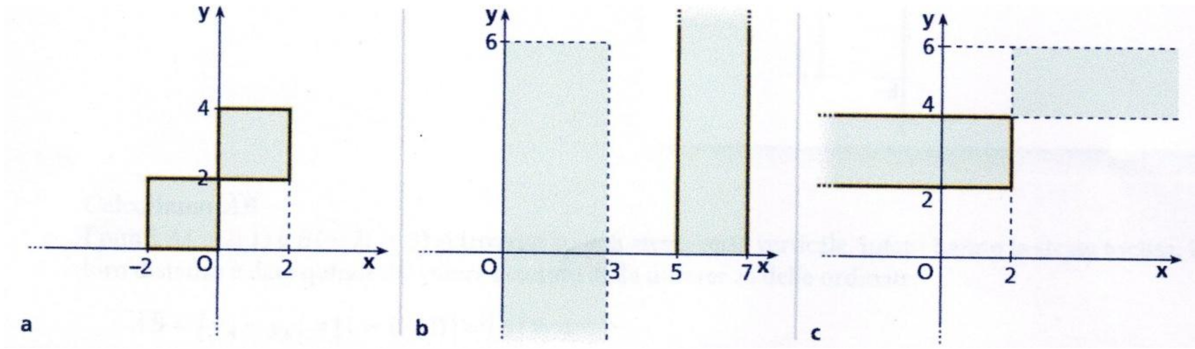


a) $-3 \le x \le 1$

b) $-5 \le x \le 0$, $y \ge -3$

c) $-4 \le x \le 2$, $1 \le y \le 5$

per l'esercizio 13 abbiamo



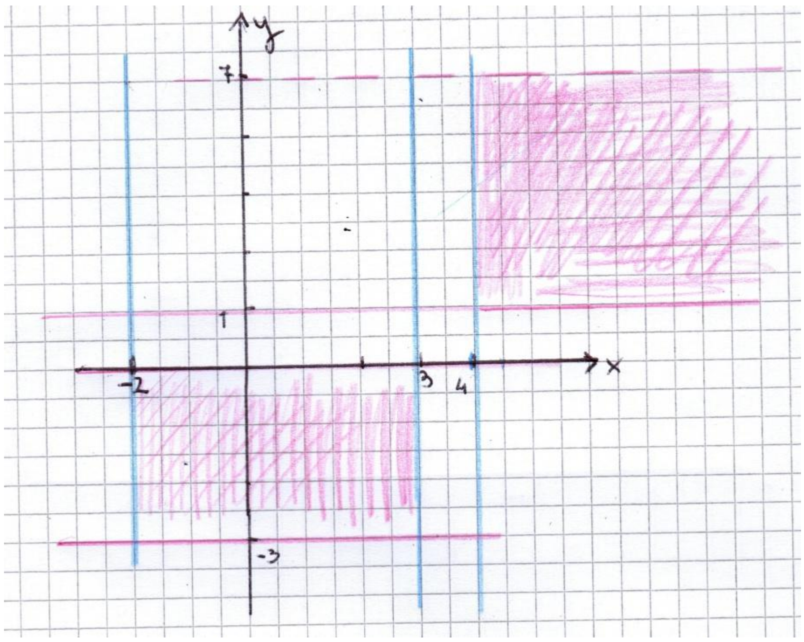
a) $\{(x,y) \mid -2 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2\} \cup \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 4\}$

b) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 3,\ y \le 6\} \cup \{(x,y) \mid 5 \le x \le 7,\ y \ge 0\}$

c) $\{(x,y) \mid x \le 2,\ 2 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) \mid x > 2,\ 4 < y < 6\}$

Per **L'ESERCIZIO 14**, dobbiamo rappresentare gli insiemi di punti che soddisfano le condizioni seguenti:

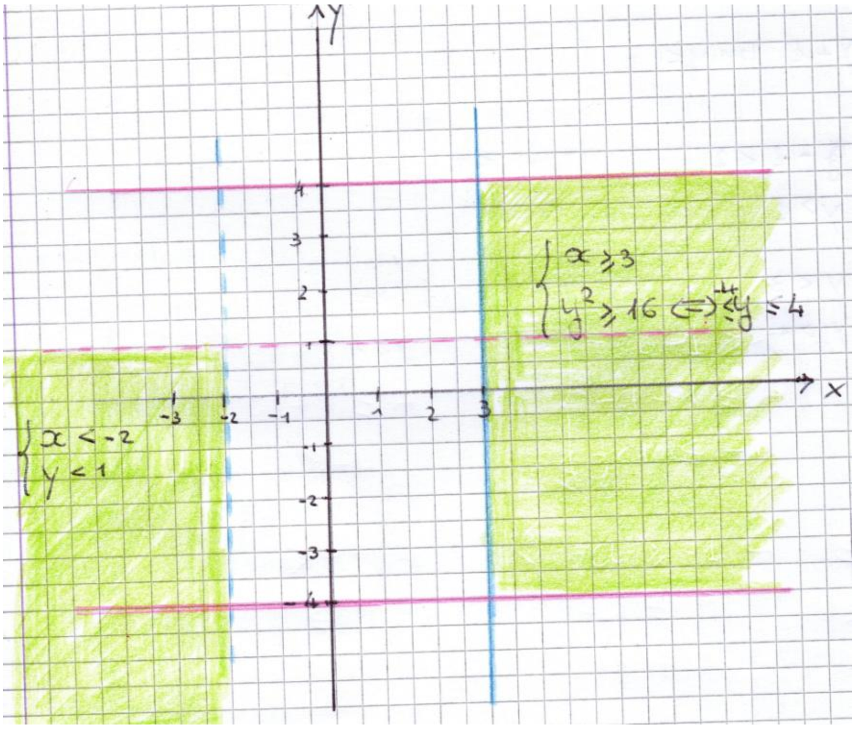
$$\begin{cases} -2 \le x \le 3 \\ -3 \le y < 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 4 \\ 1 \le y < 7 \end{cases}.$$



15 $\begin{cases} x < -2 \\ y < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 3 \\ y^2 \le 16 \end{cases}$

L'unico "problema" consiste nel trovare la condizione $y^2 \le 16$, che si traduce nella condizione

$-4 \le y \le 4$



ESERCIZIO 16

$$\begin{cases}|x-2|<3\\ |y|\le 2\end{cases};\qquad \begin{cases}|3-x|\ge 1\\ |y-1|<2\end{cases}.$$

Dobbiamo studiare i valori assoluti, per sapere quali relazioni considerare

Cominciamo con il primo sistema .Ricaviamo

$x - 2 \ge 0 \rightarrow x \ge 2$

$x - 2 < 0 \rightarrow x<2$

$y > 0$

Dobbiamo quindi studiare i due sistemi

SISTEMA 1

- $x - 2 < 3$
- $y \le 2$
- $x \ge 2$
- $y \ge 0$

SISTEMA 2

- $- x + 2 < 3$
- $- y \le 2$
- $x < 2$
- $y < 0$

Risolvendo le relazioni presenti nei due sistemi otteniamo:

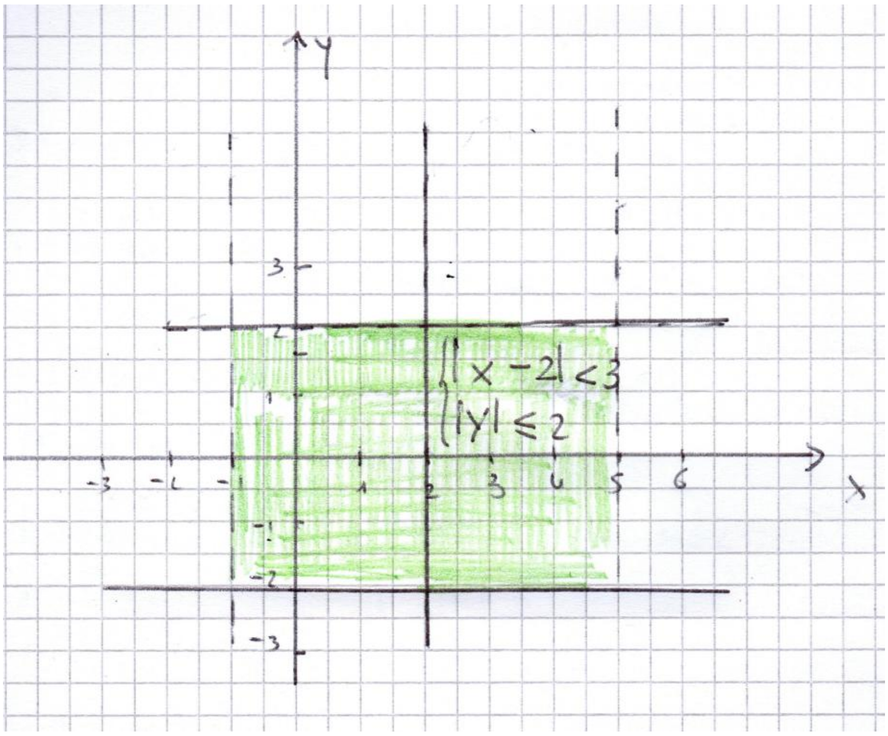
SISTEMA 1

- $x < 5$
- $x \geq 2$
- $y \leq 2$
- $y \geq 0$

SISTEMA 2

- $-x < 1 \rightarrow x > -1$
- $-y \leq 2 \rightarrow y \geq -2$
- $x < 2$
- $y < 0$

Rappresentando le soluzioni ottenute abbiamo:



Passiamo ora al secondo sistema proposto. Studiando il segno dei due valori assoluti otteniamo:

$3-x > 0$ per $x < 3$

$y-1 > 0$ per $y > 1$

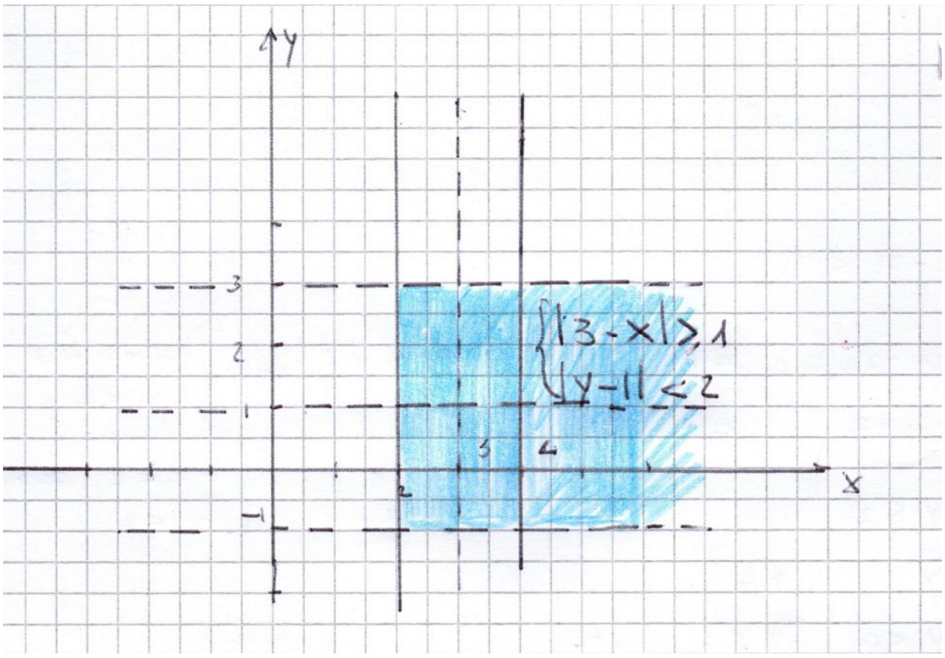
Dobbiamo quindi risolvere i due sistemi

SISTEMA 1	SISTEMA 2
• $3-x \geq 1$ • $x < 3$ • $y - 1 < 2$ • $y > 1$	• $-3+x \geq 1$ • $x > 3$ • $-y + 1 < 2$ • $y < 1$

Otteniamo

SISTEMA 1	SISTEMA 2
• $-x \geq 1-3 \Rightarrow x \leq 2$ • $x < 3$ • $y - 1 < 2 \Rightarrow y < 3$ • $y > 1$	• $-3+x \geq 1 \Rightarrow x \geq 4$ • $x > 3$ • $-y+1 < 2 \Rightarrow y > -1$ • $y < 1$

Rappresentando le soluzioni dei due sistemi, abbiamo



17 $\begin{cases} |x-4| < 2 \\ 1 + y^2 < 5 \end{cases}$

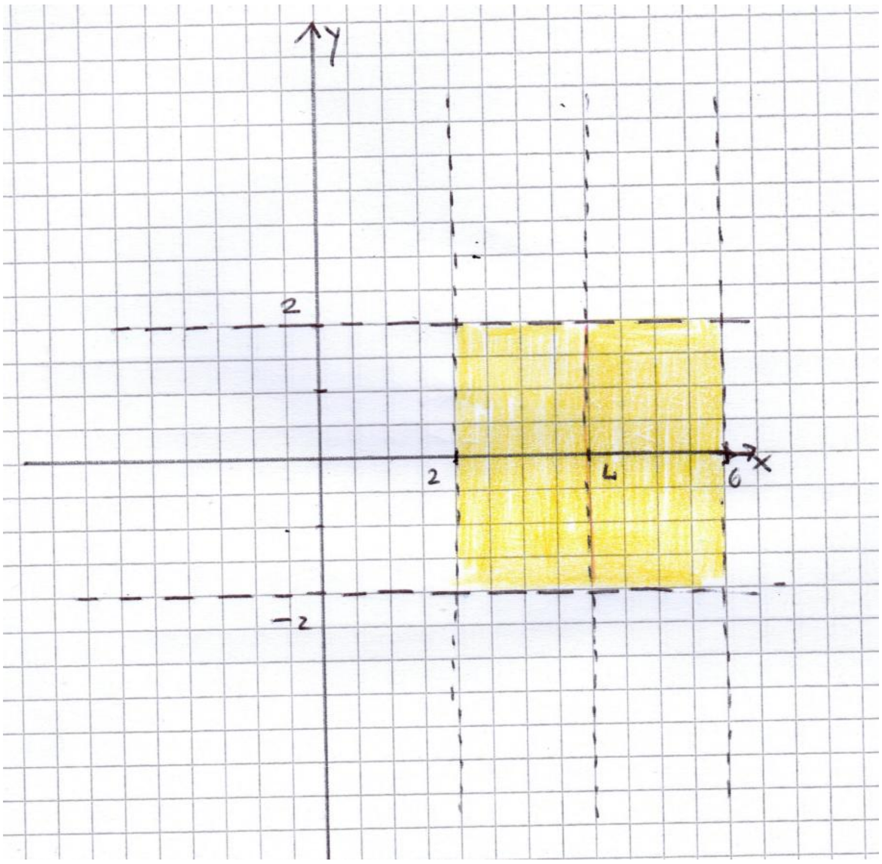
Come nei casi precedenti, dobbiamo studiare il segno del valore assoluto per sapere quali relazioni considerare

$x-4 > 0$ per $x > 4$

Abbiamo quindi i due sistemi :

SISTEMA 1	SISTEMA 2
• $x-4 < 2$ • $x > 4$ • $1 + y^2 < 5$ Risolvendo abbiamo • $x < 6$ • $x > 4$ • $y^2 < 4 \Rightarrow -2 < y < 2$	• $-x + 4 < 2$ • $x < 4$ • $1 + y^2 < 5$ Risolvendo otteniamo • $x > 2$ • $x < 4$ • $-2 < y < 2$

Rappresentiamo le soluzioni dei due sistemi:

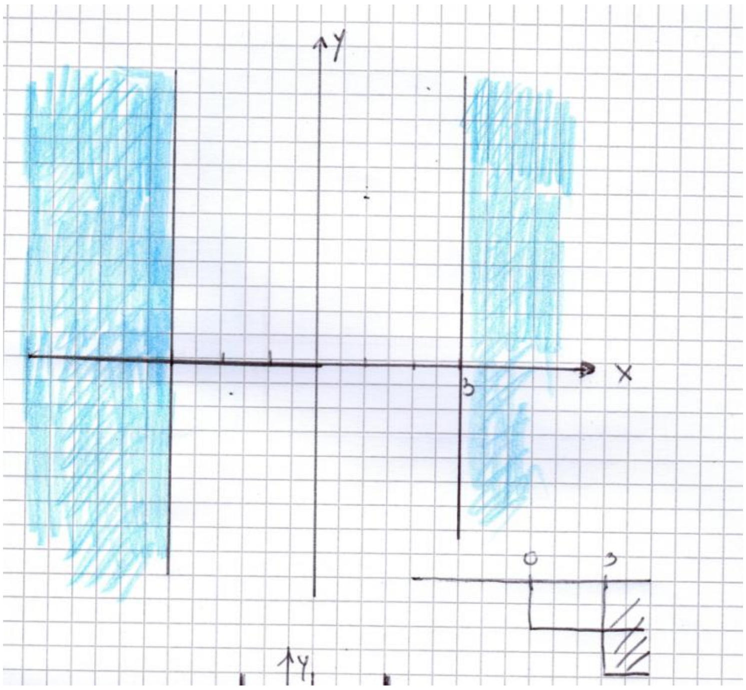


18 Rappresenta i punti dell'asse x la cui ascissa verifica la condizione:

a) $|x| \geq 3$; b) $|2x-1| = 3$; c) $|3x+2| < 1$.

a) $x \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

per $x < 0 \Rightarrow -x \geq 3 \Rightarrow x \leq -3$



b) in questo caso le soluzioni sono le due rette x =2 v x = -1

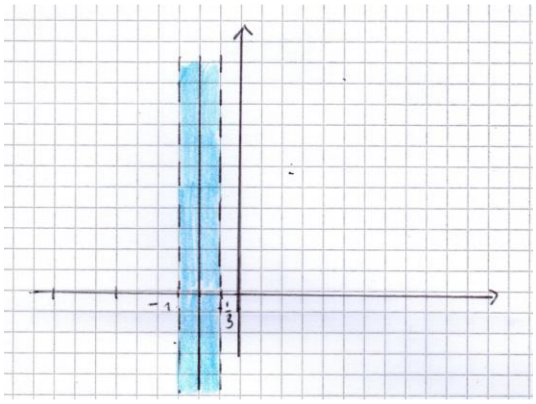
c) Otteniamo

- Per x ≥ -2/3 : 3x +2 < 1
- Per x < -2/3 : -3x – 2 < 1

Da cui ricaviamo

x ≥ -2/3 x < -1/3	x < -2/3 -3x – 2 < 1 ➔ x > -1

Abbiamo perciò



19 Rappresenta i punti dell'asse y la cui ordinata verifica la condizione:

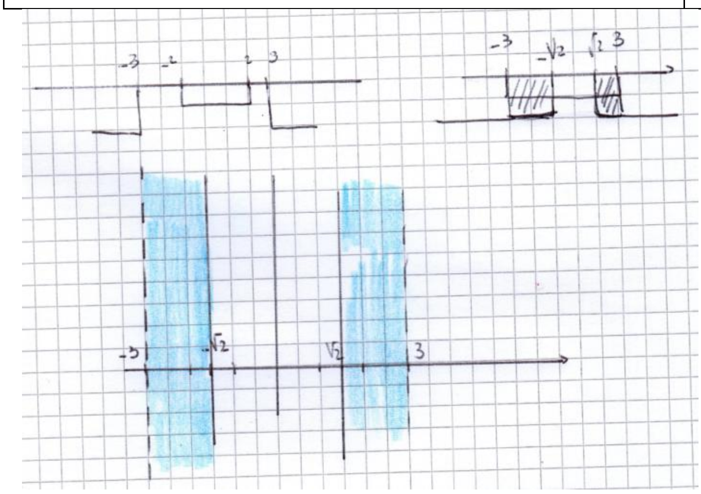
a) $|y^2 - 3| \leq 1$; b) $|1 - 3y| = 6$; c) $|y - 4| > 2$.

a) $|y^2 - 3| \leq 1$

$$y^2 - 3 \geq 0 \text{ Per } y \leq -3 \text{ v } y \geq 3$$

Abbiamo quindi

y ≤ -3 v y ≥ 3 $y^2 - 3 \leq 1$ ➔ $y^2 \leq 4$ ➔ $-2 \leq y \leq 2$ Non ha soluzione	-3<y<3 $-y^2 + 3 \leq 1$ ➔ $-y^2 \leq -2$ ➔ $y \leq -\sqrt{2}$ v $y \geq \sqrt{2}$ ha soluzione $-3 < y \leq -\sqrt{2}$ v $\sqrt{2} \leq y < 3$



b) $|1- 3y| = 6$

$1-3y \geq 0 \quad y \leq 1/3$

Abbiamo quindi

$y \leq 1/3$ $1-3y = 6 \rightarrow -3y = 5 \rightarrow y = -5/3$	$y > 1/3$ $3y -1 = 6 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = 7/3$

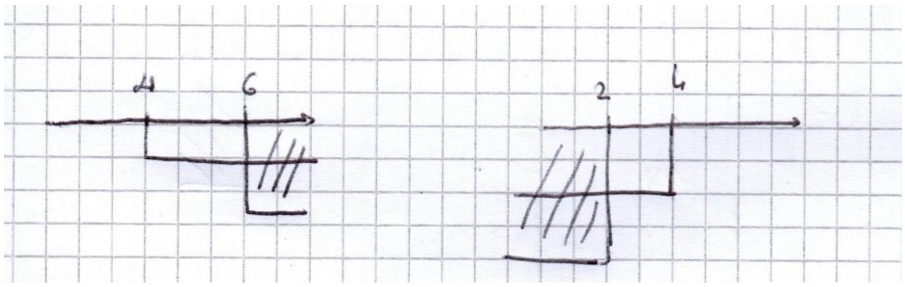
Le soluzioni sono le due rette $y= -5/3$ e $y = 7/3$

c) $|y-4| > 2$

$y-4 \geq 0$ Per $y \geq 4$

Otteniamo

$y \geq 4$ $y-4 > 2 \rightarrow y > 6$	$y < 4$ $4-y > 2 \rightarrow -y > -2 \rightarrow y < 2$



Rappresentiamo infine le soluzioni dei due sistemi: