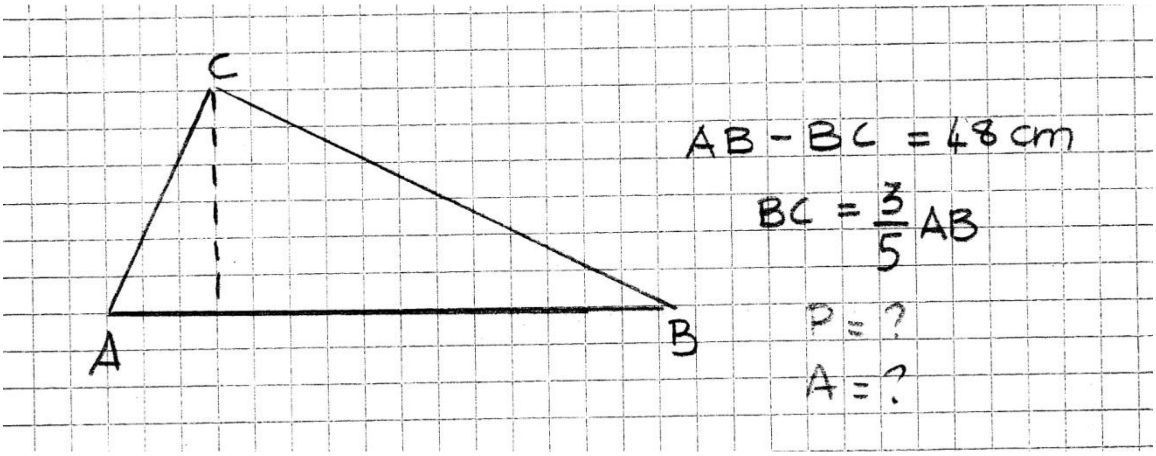
TEOREMA DI PITAGORA APPLICAZIONI CON SOLUZIONI

Vediamo alcuni esercizi sulle molte applicazioni del teorema di Pitagora, valido in tutti i casi in cui riusciamo a “vedere” un triangolo rettangolo nella figura in esame

ESERCIZIO 1

In un triangolo rettangolo, la differenza tra l’ipotenusa ed un cateto misura 48 cm e il cateto è i 3/5 dell’ipotenusa, Calcola il perimetro e l’area del triangolo



Per risolvere il problema, dobbiamo innanzitutto determinare le misure di ipotenusa AB e del cateto BC. Applicando la **proprietà dello scomporre**, abbiamo:

AB = [48 : (5-3)] x 5 = 120 cm

BC = [48 : (5-3)] x 3 = 72 cm

Per determinare la lunghezza di AC ci basta applicare il teorema di Pitagora nella sua formulazione inversa :

AC = $\sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{120^2 - 72^2} = 96\ cm$

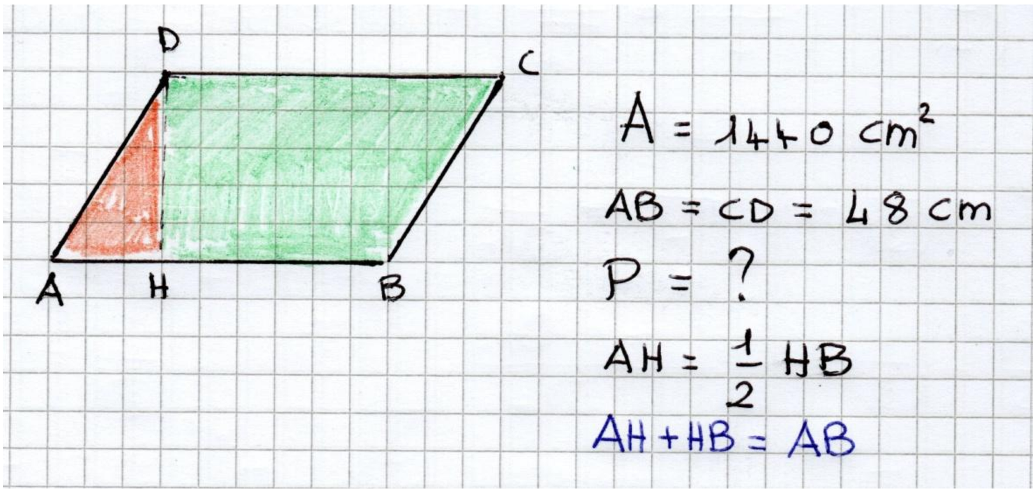
Ora non ci resta che calcolare il perimetro e l’area del triangolo dato:

P = 120 + 96 + 72 = 288 cm

A = $\frac{B\ x\ h}{2} = \frac{AC\ x\ BC}{2} = \frac{96\ x\ 72}{2} = 3456\ \text{cm}^2$

ESERCIZIO 2

In un parallelogramma avente l'area di 1440 cm^2 la base misura 48 cm. Calcola il perimetro del parallelogramma sapendo che l'altezza divide la base in due parti, una doppia dell'altra



Per calcolare il perimetro ci serve la lunghezza dei due lati obliqui, che hanno la stessa lunghezza :

BC = AD

Per ricavare tale misura, possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADH.

Possiamo infatti ricavare la misura dell'altezza DH applicando la formula inversa dell'area:

DH = A : AB = 1440 : 48 = 30 cm

Possiamo ricavare anche la lunghezza di AH applicando la proprietà del comporre :

AH = [48: (1 + 2)] x 1 = 16 cm

Infine applichiamo il teorema di Pitagora, calcolando l'ipotenusa del triangolo ADH:

AD = $\sqrt{\mathrm{AH}^2 + \mathrm{DH}^2} = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34 \text{ cm}$

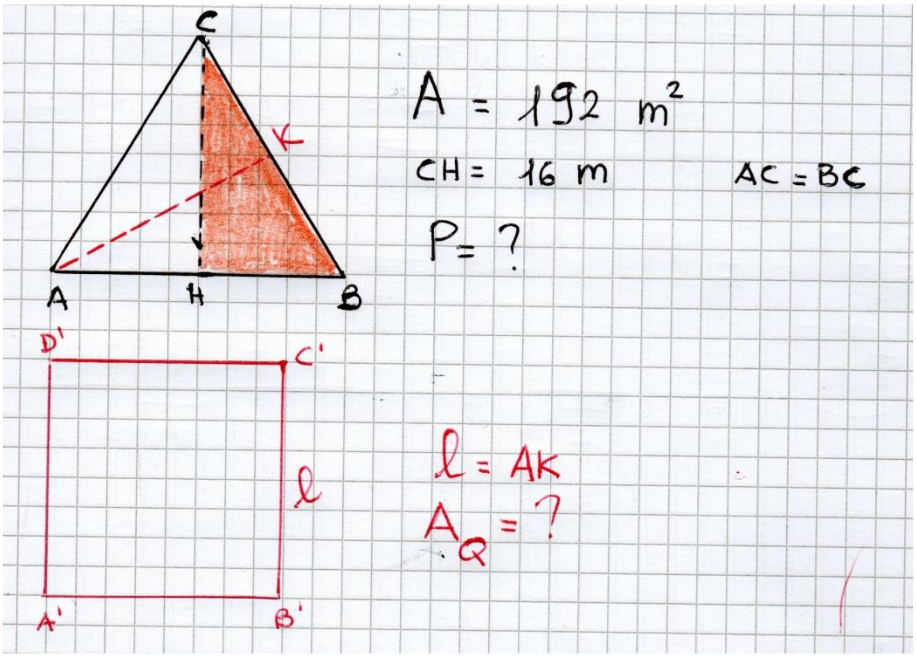
Possiamo finalmente calcolare il perimetro del parallelogramma:

P = (34x2) + (48 x 2) **= 164 cm**

ESERCIZIO 3

Un triangolo isoscele ha l'area di 192 m^2 e l'altezza relativa alla base lunga 16 m. Calcola :

- il perimetro del triangolo
- l'area di un quadrato avente il lato congruente all'altezza relativa al lato obliquo del triangolo



Disegniamo le due figure e poi cominciamo a ragionare sul triangolo isoscele. Per calcolare il perimetro del triangolo ABC dobbiamo ricavare il lato obliquo BC = AC. Per fare questo, dobbiamo quindi ricavare la misura della base.
Applichiamo quindi la formula inversa dell'area del triangolo:

AB = 2A : CH = 24 cm

Il triangolo HBC ha come cateti l'altezza CH e HB, pari alla metà della base. Possiamo quindi calcolare facilmente l'ipotenusa BC :

$$BC = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

Possiamo ora calcolare il perimetro del triangolo isoscele:

P_{tr} = 20 x 2 + 24 = 64 cm

Per rispondere al secondo quesito, dobbiamo innanzi tutto calcolare l'altezza AK relativa al lato obliquo. Ci basta applicare ancora una volta la formula inversa dell'area, considerando BC come base e AK come altezza:

AK = 2A: BC = 19.2 cm

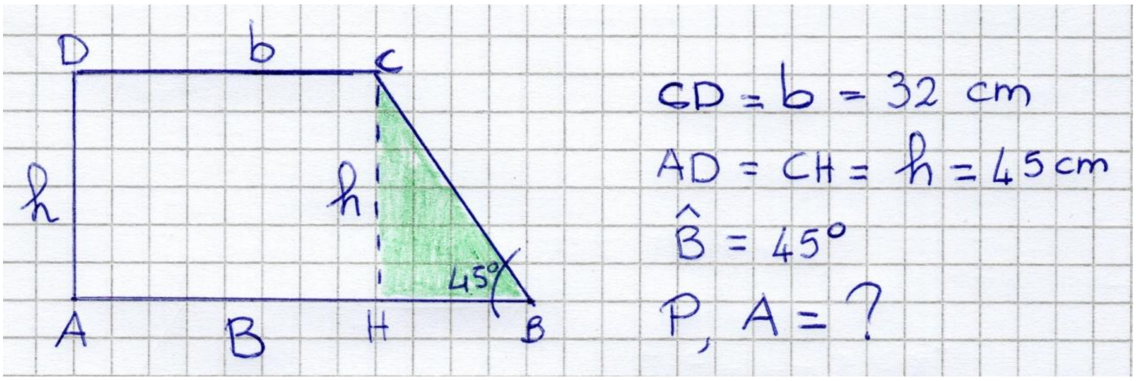
Questa è anche la lunghezza del lato del quadrato. Possiamo quindi calcolare l'area del quadrato:

$A_Q = \ell^2 =$ **368,64 cm^2**

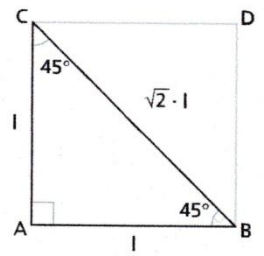
ESERCIZIO 4

In un trapezio rettangolo, la base minore e l'altezza misurano rispettivamente 32 cm e 45 cm. Sapendo che l'angolo acuto misura 45°, calcola perimetro ed area del trapezio.

Disegniamo il nostro trapezio rettangolo



Come possiamo procedere? Sembrerebbe che ci manchi un dato! Invece sappiamo che un triangolo rettangolo con un angolo di 45° è un triangolo rettangolo ISOSCELE!



Questo significa che i due cateti sono uguali:

HB = CH

Possiamo quindi calcolare facilmente il lato obliquo BC, come se fosse la diagonale di un quadrato. Abbiamo quindi:

BC = CH ∘ √2 = 45 √2 = 63,63 cm

Per calcolare perimetro ed area ci serve ora la lunghezza della base maggiore AB. Siccome AH = CD

basta sommare alla lunghezza della base minore la lunghezza di HB, pari a 45 cm.

Abbiamo quindi :

AB = AH + HB = 32 + 45 = 77 cm

Il perimetro misura quindi:

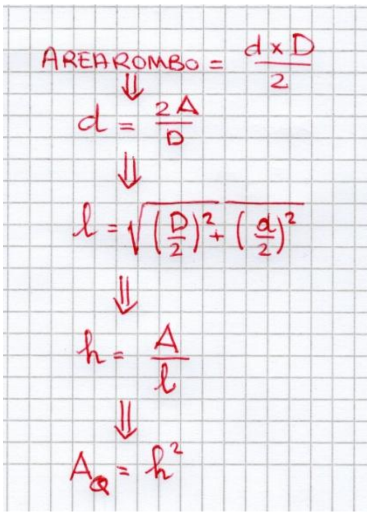
P = 77+63,63+32 + 45 = 217,63 cm

Infine l'area misura:

$$A = \frac{(B+b)^{\circ}\, h}{2} = \frac{(77+32)^{\circ}\, 45}{2} = 2452{,}5\ cm^2$$

ESERCIZIO 5

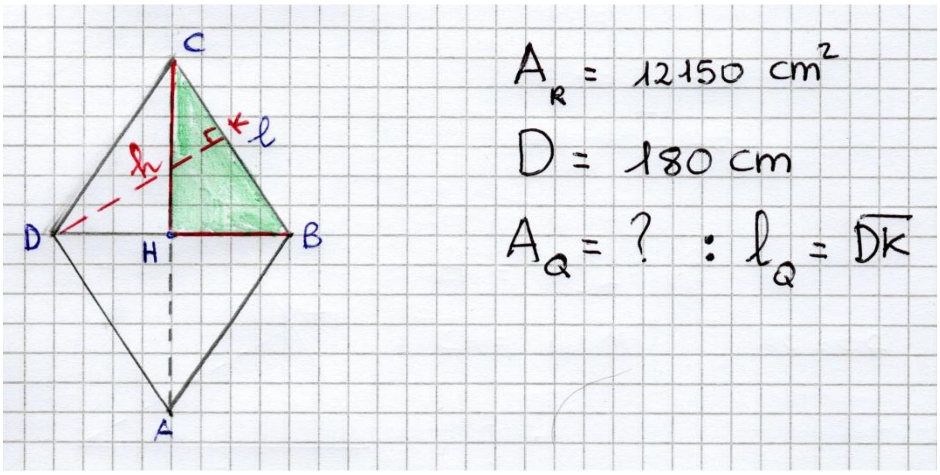
Un rombo ha l'area di 12150 cm^2 ed una diagonale lunga 180 cm. Calcola l'area di un quadrato avente il lato congruente all'altezza del rombo.



Come procederemo :

Dall'area del rombo ricaviamo la lunghezza dell'altra diagonale. Quindi applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare il lato obliquo. Ricaviamo poi l'altezza del rombo considerando l'area come il prodotto di base x altezza. Infine calcoliamo l'area del quadrato

Disegniamo ora la situazione proposta dal problema



Calcoliamo la diagonale mancante, che abbiamo supposto essere la diagonale minore:

DB = $2A_R$: D = (2 x 12150) : 180 = 135 cm

Calcoliamo ora il lato obliquo BC, ipotenusa del triangolo rettangolo HBC:

BC = $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{90^2 + 67{,}5^2} = 112.5\ cm$

Dobbiamo ora calcolare la misura dell'altezza DK:

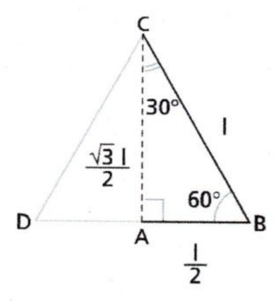
DK = A : BC = 12150 : 112.5 = 108 cm

Questa è anche la lunghezza del lato del quadrato di cui dobbiamo calcolare l'area:

$A_Q = \ell^2 =$ **11664 cm^2**

ESERCIZIO 6

Un triangolo rettangolo ha un angolo di 60° ed il cateto minore lungo 28 cm. Calcola perimetro ed area del triangolo



Un triangolo rettangolo con un angolo di 60° è la metà di un triangolo equilatero per cui possiamo ricavare velocemente tutti i valori che ci mancano.

Abbiamo infatti

BC = 2 AB = 2 x 28 = 56 cm

AC = 28 x √3 = 28 x 1.732 ≈ 48.5 cm

Il perimetro misura:

P = 48.5 + 56 + 28 = 132.5 cm

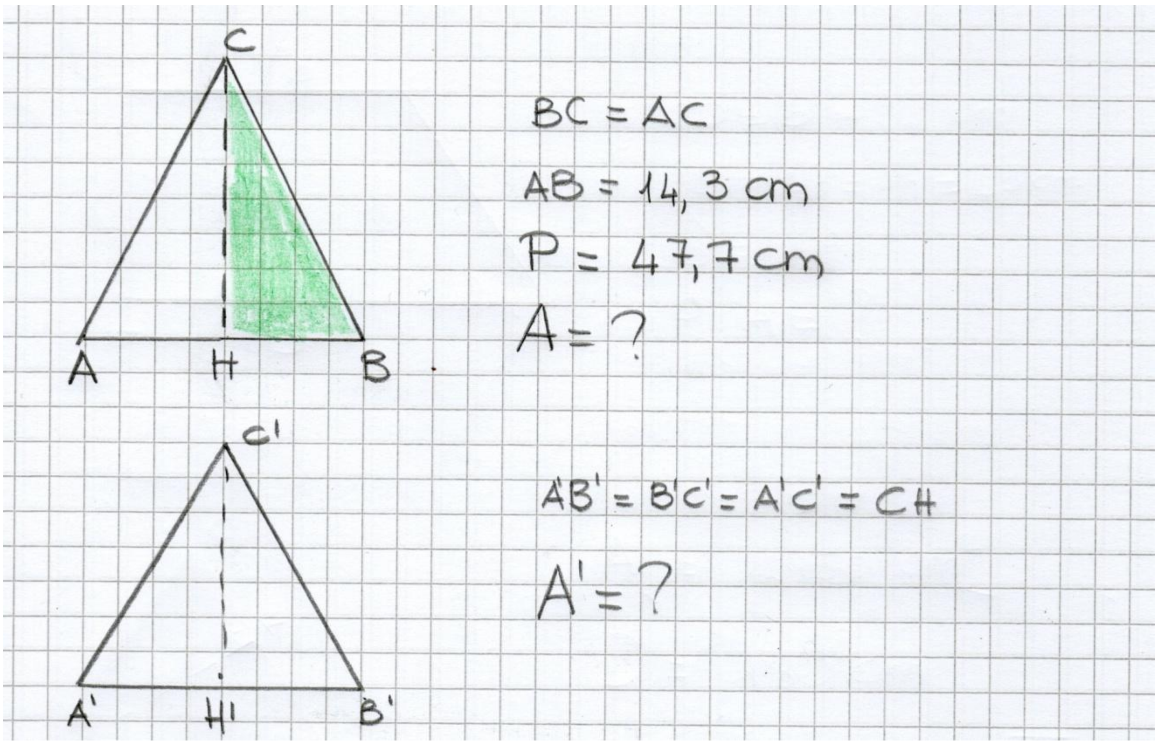
L'area invece vale :

A = (28 x 48.5) : 2 = 679 cm^2

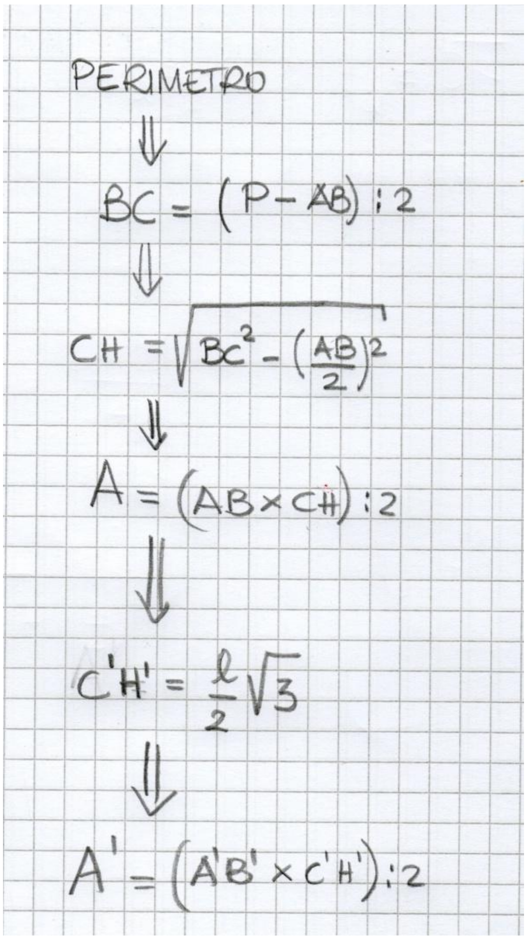
ESERCIZIO 7

In un triangolo isoscele il perimetro è di 47.7 cm e la base misura 14.3 cm. Calcola

- L'area del triangolo
- L'area di un triangolo equilatero avente il lato congruente con l'altezza del triangolo dato



Questo lo schema che seguiremo:



Dal perimetro possiamo ricavare la lunghezza dei lati obliqui AC = BC.

Abbiamo :

BC = (P – AB) : 2 = (47.7 – 14.3) : 2 = 16.7 cm

Possiamo ora applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo HBC per calcolare l'altezza del triangolo isoscele:

CH = $\sqrt{16.7^2 - \left(\frac{14.3}{2}\right)^2} = 15.09\ cm$

L'area del triangolo isoscele misura quindi:

A = (AB x CH) : 2 = 107,9 cm^2

Passiamo ora al triangolo equilatero. Il problema ci dice che il lato del triangolo equilatero è congruente all'altezza CH.

Per calcolare l'area, dobbiamo quindi calcolare l'altezza C'H', che in un triangolo equilatero si calcola velocemente :

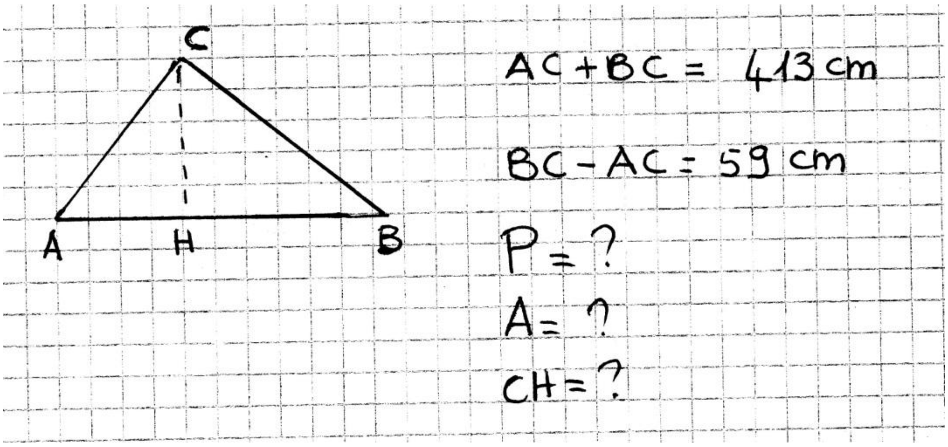
C'H' = $\frac{A'B'}{2} \circ \sqrt{3} = 13.067\ cm$

L'area del triangolo equilatero misura infine:

A' = (15.09 x 13.067) : 2 = 98.54 cm^2

ESERCIZIO 8

In un triangolo rettangolo, la differenza e la somma dei due cateti misurano rispettivamente 59 cm e 413 cm. Calcola il perimetro, l'area e la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa



Sappiamo come calcolare due numeri di cui conosciamo la somma S e la differenza D :

$$a = \frac{S+D}{2}$$
$$b = \frac{S-D}{2}$$

Con a > b
In questo caso
S = 413 cm
D = 59 cm

I due cateti misurano quindi:
AC = (413 – 59) : 2 = 177 cm
BC = (413+59) : 2 = 236 cm
Possiamo quindi calcolare l'ipotenusa AB applicando il teorema di Pitagora :
AB = $\sqrt{177^2 + 236^2} = 295\ cm$

Calcoliamo ora perimetro ed area:

P = 708 cm

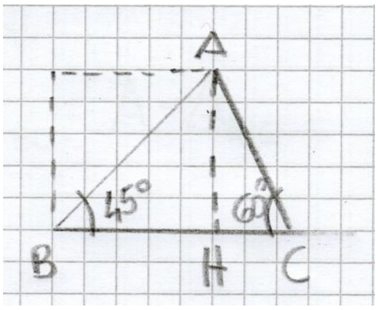
A = (177 x 236) : 2 = 20886 cm^2

$$AC = \frac{413-59}{2}$$
$$BC = \frac{413+59}{2}$$
$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2}$$
$$P = AB + BC + AC$$
$$A = \frac{AC \times BC}{2}$$
$$CH = \frac{2A}{AB}$$

A questo punto, applicando la formula inversa dell'area, ricaviamo la misura dell'altezza relative all'ipotenusa :
CH = 2 A : AB = 141.6 cm

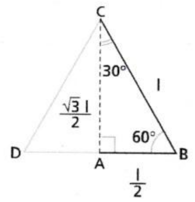
ESERCIZIO 9

Nel triangolo scaleno ABC i due angoli alla base misurano rispettivamente 45° e 60°. Sapendo che il lato $\overline{AC}$ misura 58 cm, calcola perimetro ed area del triangolo

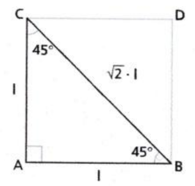


Disegniamo la figura e notiamo che l'altezza divide il nostro triangolo scaleno in due triangoli rettangoli particolari.

Quello con angolo alla base di 45° (ABH) è un triangolo rettangolo isoscele mentre l'altro (AHC) è la metà di un triangolo equilatero.



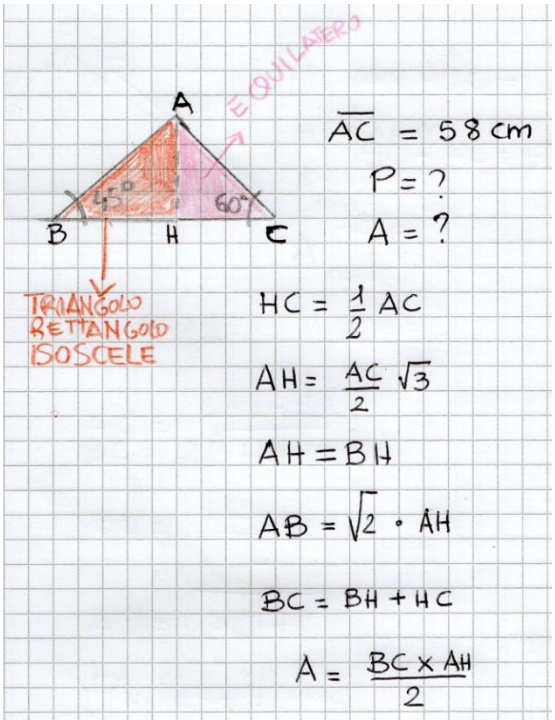
Ci basta quindi conoscere la lunghezza del lato AC per ricavare immediatamente anche la misura di HC e quella di AH.



Abbiamo infatti :

HC = ½ AC = 58 : 2 = 29 cm

AH = AC/2 x √3 = 50,23 cm



Noto AH, possiamo passare all'altro triangolo. Infatti notiamo subito che

BH = AH = 50,23 cm

Di conseguenza, l'ipotenusa AB si calcola come se fosse la diagonale di un quadrato di lato AH:

AB = AH √2 = 50.23 x 1.414 = 71,03 cm

Possiamo quindi calcolare il perimetro, dopo aver osservato che la base del triangolo dato è pari a

BC = BH + HC = 50,23 + 29 = 79,23 cm

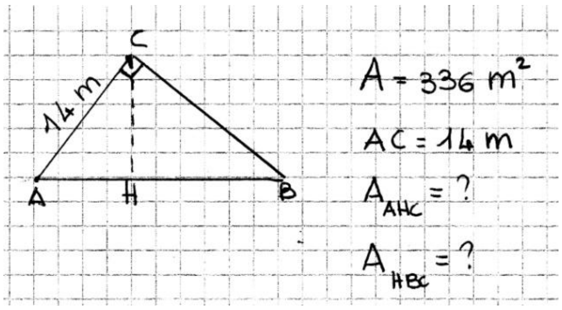
Abbiamo quindi :

P = AB + BC + AC = 71,03 + 79.23 + 58 = **208,26 cm**

A = (BC x AH) : 2 = (79,23 x 50,23) : 2 = **1989.86 cm^2**

ESERCIZIO 10

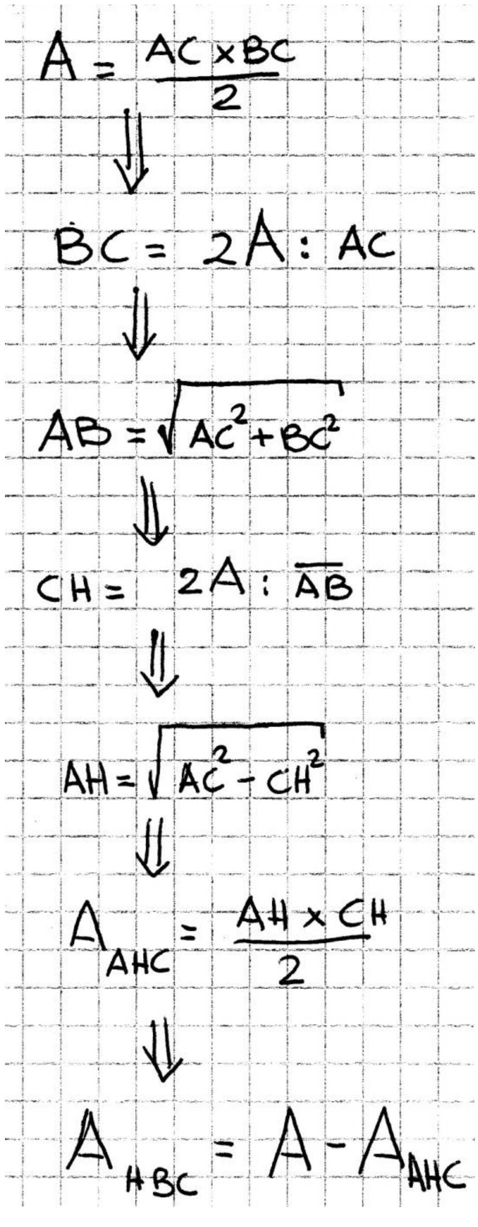
In un triangolo rettangolo di area 336 m^2, un cateto misura 14 m. Calcola l'area dei due triangoli in cui il triangolo dato viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa



Disegniamo la situazione illustrata nel problema.

Notiamo subito che, una volta ricavato il secondo cateto dalla formula inversa dell'area, possiamo calcolare l'ipotenusa AB applicando il teorema di Pitagora e poi ricavare l'altezza CH dalla formula dell'area.

Una volta calcolata CH, ci basta applicare il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli rettangoli in cui l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo dato per poter ricavare il cateto mancante (AH oppure HB) e calcolare l'area richiesta. Infatti per l'altro triangolo l'area si ottiene come differenza con l'area totale. Di lato trovate lo schema del procedimento illustrato, che ora andiamo a completare con i numeri.



Dalla formula inversa dell'area ricaviamo subito :

BC = 2 A : AC = 48 m

Possiamo quindi calcolare la lunghezza dell'ipotenusa AB con il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABC :

AB = $\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50\ m$

Ricordando che in un triangolo l'area è sempre uguale al semiprodotto di base per altezza, considerando AB la base possiamo ricavare l'altezza relativa alla base CH:

CH = 2 A : AB = 13.44 m

Nota CH, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHC per calcolare la proiezione del cateto AC sull'ipotenusa:
AH = $\sqrt{AC^2 - CH^2} = 3.92\ m$

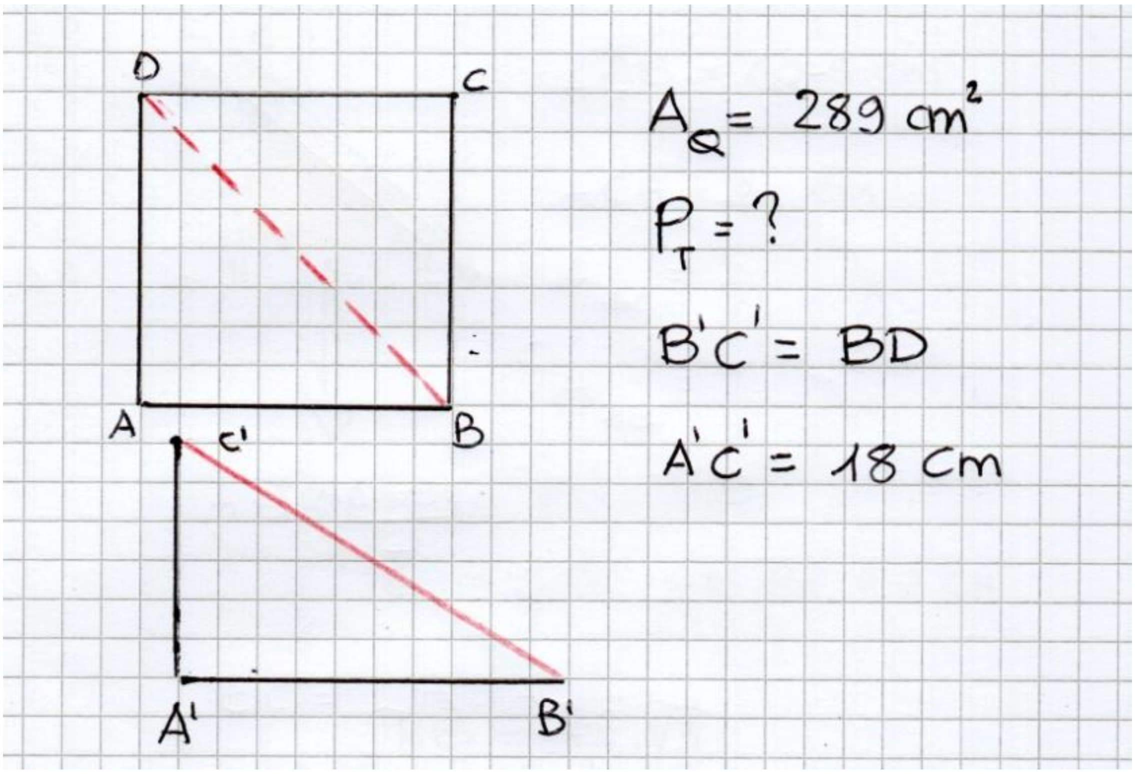
Possiamo quindi calcolare HB come differenza con la lunghezza di AB :
HB = AB – AH = 50 – 3.92 = 46.08 m

Ci restano ora da calcolare le aree dei due triangoli rettangoli AHC e HBC :
A_{AHC} = (AH x CH) : 2 = (3.92 x 13.44) : 2 = 26.34 m^2

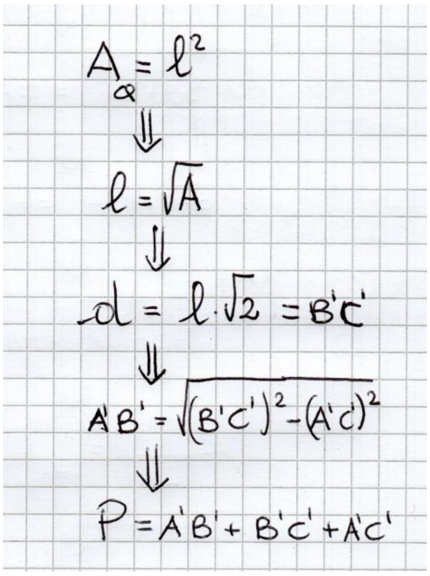
A_{HBC} = A - A_{AHC} = 336 – 26.34 = 309.66 m^2

ESERCIZIO 11

Un quadrato ha l'area di 289 cm^2. Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente un cateto lungo 18 cm e l'ipotenusa congruente alla diagonale del quadrato.



Disegniamo la situazione illustrata dal problema. Notiamo che, una volta ricavato il lato del quadrato dalla formula inversa dell'area, possiamo calcolare facilmente la lunghezza della diagonale applicando il teorema di Pitagora al quadrato.



Nota la diagonale, possiamo ricavare il cateto mancante del triangolo rettangolo dato e infine calcolare il perimetro richiesto.

Mettiamo ora i numeri al posto delle parole.

Calcoliamo il lato del quadrato :

$AB = \sqrt{A_Q} = 17$ cm

Dal teorema di Pitagora applicato al quadrato sappiamo che la diagonale è pari a

$DB = AB \times \sqrt{2} = 17 \times 1{,}414 = 24.04$ cm

Abbiamo quindi anche la misura dell'ipotenusa del triangolo rettangolo dato. Possiamo quindi calcolare il cateto A'B' applicando il teorema di Pitagora:

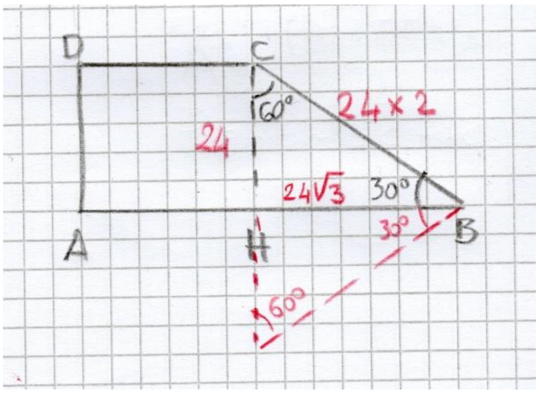
$A'B' = \sqrt{B'C'^2 - A'C'^2} = 15.93\ cm$

Possiamo quindi calcolare il perimetro richiesto:

P = 24.04 + 15.93 + 18 = 57.97 cm

ESERCIZIO 12

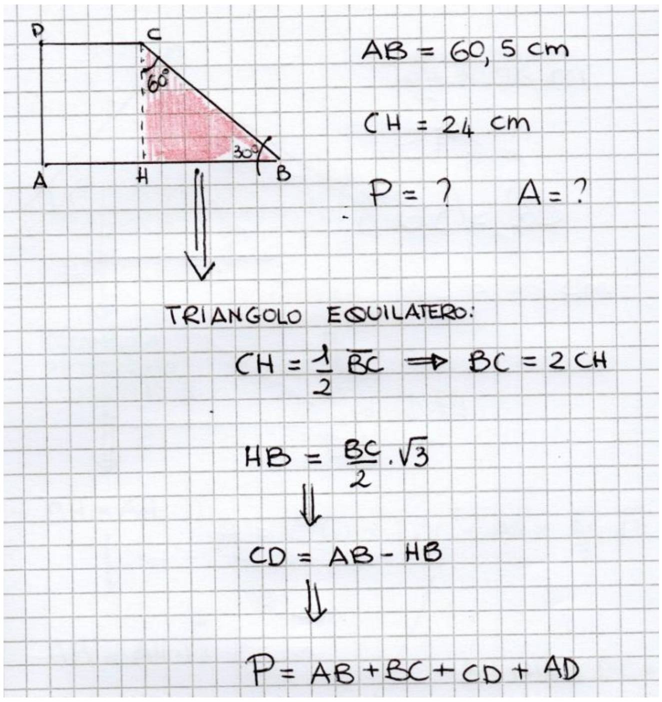
In un trapezio rettangolo, la base maggiore e l'altezza misurano rispettivamente 60.5 cm e 24 cm. Sapendo che l'angolo acuto misura 30°, calcola perimetro ed area del trapezio



Come sappiamo dalla Geometria, un triangolo rettangolo con un angolo di 30° è la metà di un triangolo equilatero. Possiamo quindi calcolare velocemente tutte le misure dei suoi lati, grazie alle formule del teorema di Pitagora.

In questo caso possiamo ricavare velocemente il lato obliquo BC e la lunghezza di HB.

La conoscenza di HB ci permette il calcolo della misura della base minore CD e quindi il calcolo di area e perimetro. Passiamo quindi ai numeri.



BC = 2 CH = 48 cm

HB = CH √3 = 24 x 1.732 = 41.57 cm

La base minore CD misura quindi:

CD = AB – HB = 60.5- 41.57 = 18.93 cm

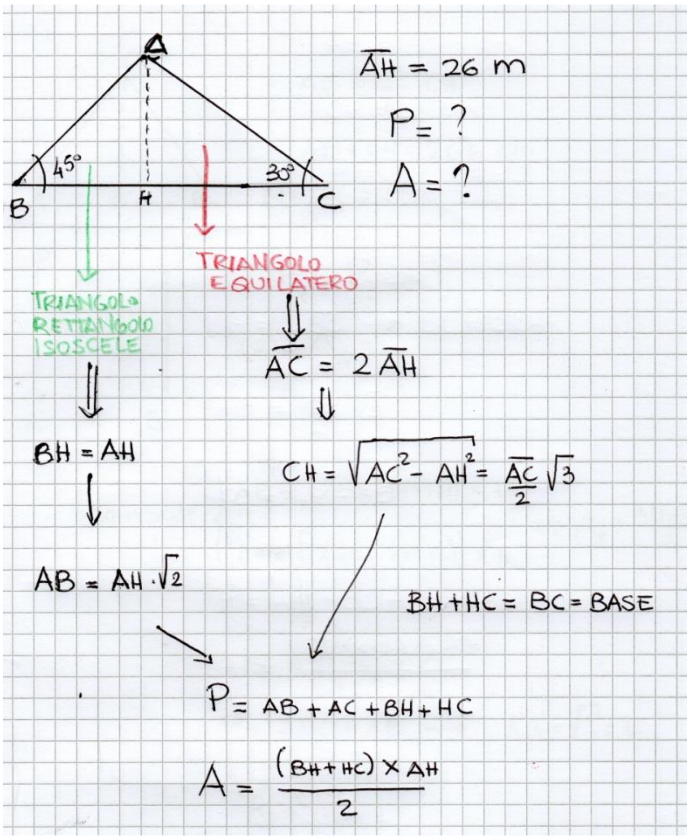
Possiamo quindi calcolare il perimetro e l'area del trapezio rettangolo dato (AD = CH!) :

P = AB + BC + CD + AD = 60.5 + 48 + 18.93 + 24 = 151.43 cm

A = $\frac{(AB+CD)\,°\,CH}{2} = \frac{(60.5+18.93)°24}{2} = 953.16\ cm^{2}$

ESERCIZIO 13

In un triangolo scaleno, i due angoli alla base misurano rispettivamente 30° e 45°. Sapendo che l'altezza $\overline{AH}$ misura 26 m, calcola area e perimetro del triangolo



La conoscenza dei due angoli alla base ci permette immediatamente di capire che il triangolo scaleno dato viene diviso dall'altezza relativa alla base in due triangoli rettangoli particolari, facilmente risolvibili.

Infatti notiamo subito che il triangolo rettangolo ABH è un triangolo rettangolo isoscele, mentre il triangolo AHC è la metà di un triangolo equilatero.

Nota AH, possiamo quindi ricavare :

AC = 2 AH = 2 x 26 = 52 m

HC = AH x √3 = 26 x 1.732 = 45.03 m

BH = AH = 26 m

AB = AH x √2 = 26 x 1.414 = 36.76 m

Abbiamo inoltre :

BC = BH + HC = 26 +45.03 = 71.03 m

Non ci resta che calcolare il perimetro e l'area del triangolo scaleno dato:

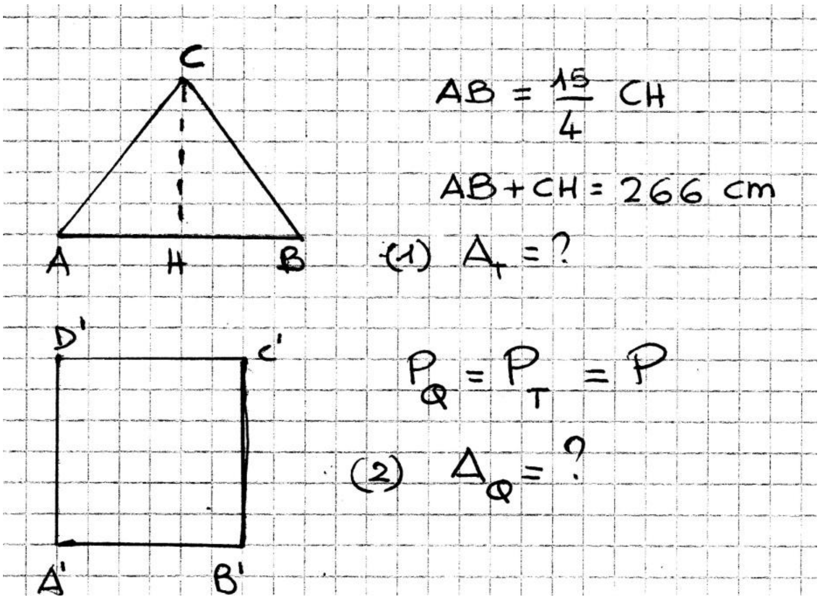
P = AB + BC + AC = 36.76 + 71.03 + 52 = 159.79 m

A = (BC x AH) : 2 = (71.03 x 26) : 2 = 923.39 m^2

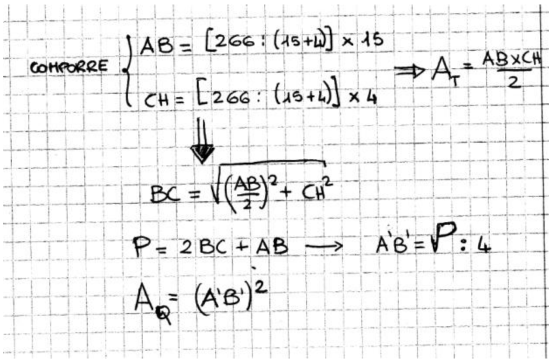
ESERCIZIO 14

In un triangolo isoscele la base e l'altezza sono l'una i 15/4 dell'altra e la somma delle loro lunghezze misura 266 cm. Calcola:

- area del triangolo
- area del quadrato avente perimetro uguale a quello del triangolo dato



Nella figura ho illustrato la situazione proposta dal problema. Dall'algebra sappiamo come ricavare due numeri, note la loro somma e il rapporto.



Dalla proprietà del comporre ricaviamo:

AB = [266 : (15 + 4)] x 15 = 210 cm

CH = [266 : (15 + 4)] x 4 = 56 cm

Per ricavare l'area del triangolo, disponiamo di tutti i dati :

A_T = (AB x CH) : 2 = 5880 cm^2

Per poter rispondere al secondo quesito, dobbiamo calcolare anche il perimetro del triangolo isoscele. Per questo ci serve ottenere la misura di BC = AC. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHC, con HC = ½ AB :

BC = = $\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + CH^2} = 119\ cm$

Possiamo ora calcolare il perimetro del triangolo, uguale a quello del quadrato:

P = 119 x 2 + 210 = 448 cm

Il lato del quadrato è quindi :

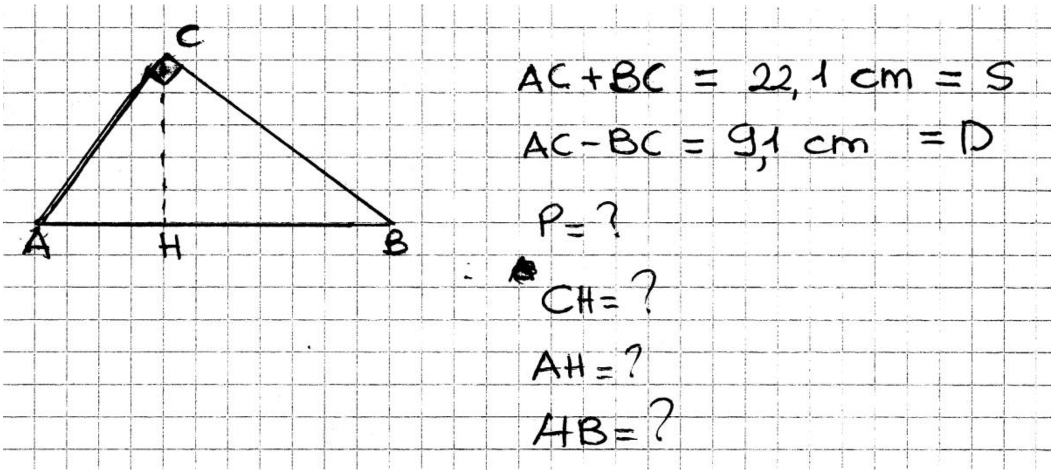
A'B' = P : 4 = 112 cm

E quindi l'area vale : **$A_Q = (112)^2 = 12544\ cm^2$**

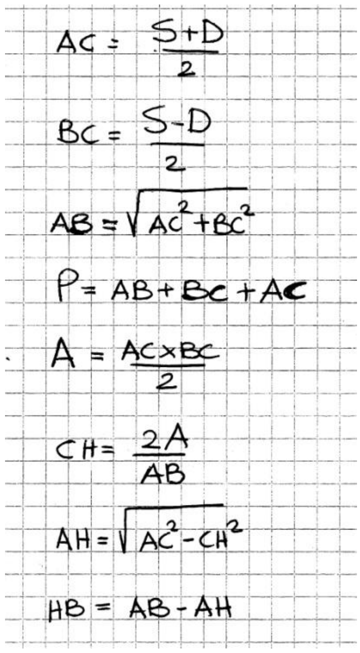
ESERCIZIO 15

In un triangolo rettangolo la somma delle lunghezze dei due cateti misura 22,1 cm e la loro differenza 9,1 cm. Calcola:

- il perimetro del triangolo
- l'area del triangolo
- la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa
- le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa



Dall'algebra sappiamo come fare quando di due numeri conosciamo la somma e la differenza. Risulta infatti:



$$a = \frac{S+D}{2}$$

$$b = \frac{S-D}{2}$$

Nel nostro caso abbiamo:

AC = (S+D) : 2 = (22.1+9.1) : 2 = 15.6 cm

BC = (S-D) : 2 = (22.1- 9.1) : 2 = 6.5 cm

Per calcolare il perimetro ci manca la lunghezza dell'ipotenusa AB, che ricaviamo applicando il teorema di Pitagora:

AB = $\sqrt{AC^2 + BC^2} = 16.9\ cm$

Calcoliamo perimetro ed area:

P = 16.9 + 15.6 + 6.5 = 39 cm

A = (AC x BC) : 2 = 50.7 cm^2

Dalla formula inversa dell'area possiamo ricavare ora l'altezza relativa all'ipotenusa CH :
CH = 2 A : AB = 6 cm

Applicando il teorema di Pitagora ad uno dei triangoli rettangoli in cui CH divide il triangolo rettangolo ABC possiamo ricavare una delle due proiezioni dei cateti. L'altra verrà poi calcolata come differenza con la lunghezza dell'ipotenusa. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AHC per ricavare AH :

AH = $\sqrt{AC^2 - CH^2} = 14.4\ cm$

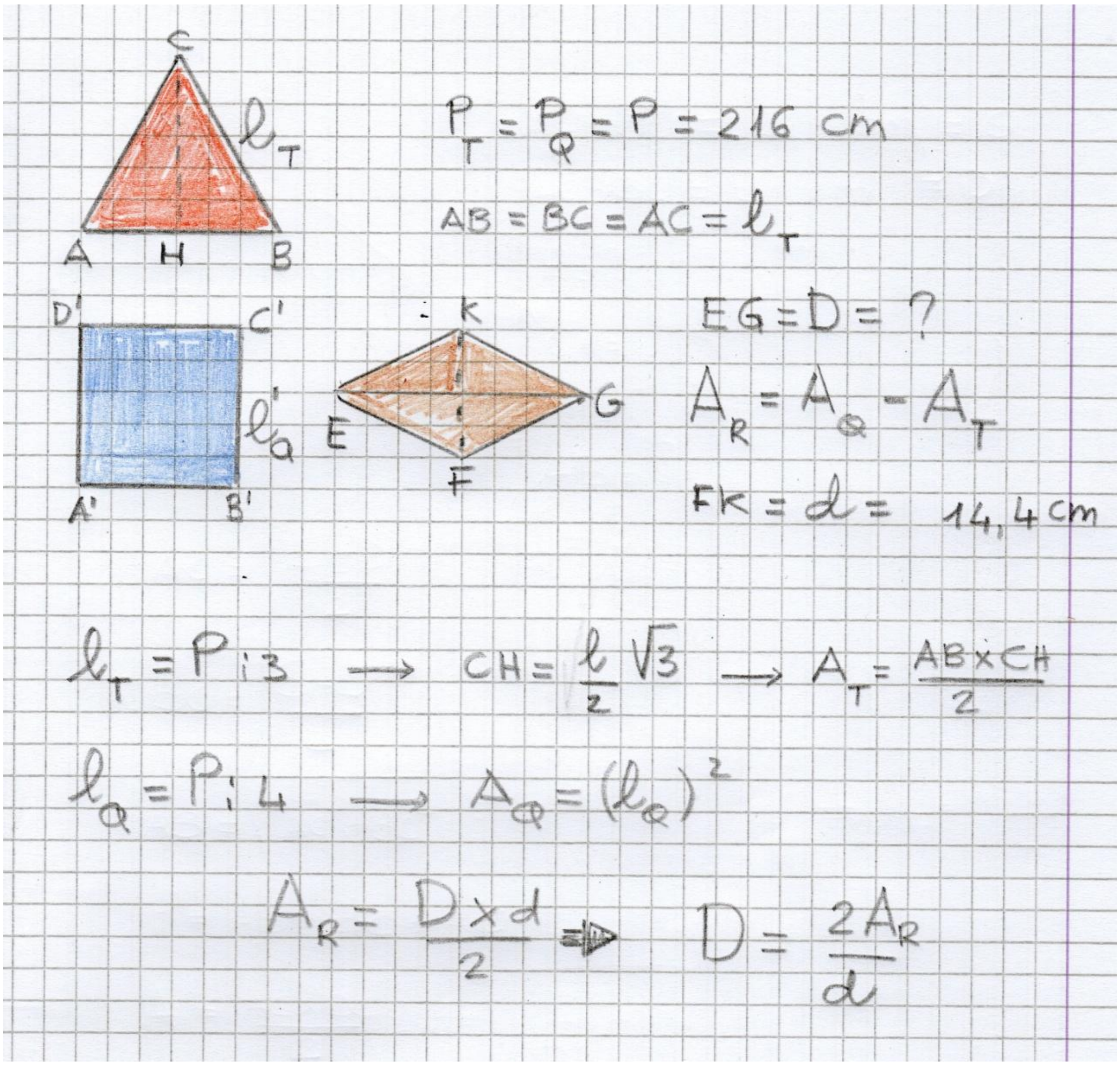
Di conseguenza:

HB = AB – AH = 16.9 – 14.4 = 2.5 cm

ESERCIZIO 16

Un triangolo equilatero e un quadrato hanno lo stesso perimetro di 216 cm. Calcola la misura della diagonale maggiore di un rombo avente area uguale alla differenza tra le aree del quadrato e del triangolo, con la diagonale minore pari a 14,4 cm

Non lasciatevi spaventare : leggete attentamente i dati e poi schematizzate la situazione illustrata dal problema!



Calcoliamo subito la lunghezza dei lati del triangolo equilatero e del quadrato dalla misura del perimetro:

ℓ_T = P : 3 = 72 cm

ℓ_Q = P : 4 = 54 cm

Nota la misura del lato, possiamo ricavare anche la misura dell'altezza CH del triangolo equilatero. Dal teorema di Pitagora applicato al triangolo equilatero sappiamo infatti che :

$$CH = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Ovvero:

CH = 62.35 cm

Calcoliamo ora le aree di triangolo e quadrato:

A_T = (AB x CH) : 2 = 2244.6 cm^2

A_Q = $(A'B')^2$ = 2916 cm^2

L'area del rombo vale quindi:

$A_R = A_Q - A_T$ = 671.4 cm^2

Siccome :

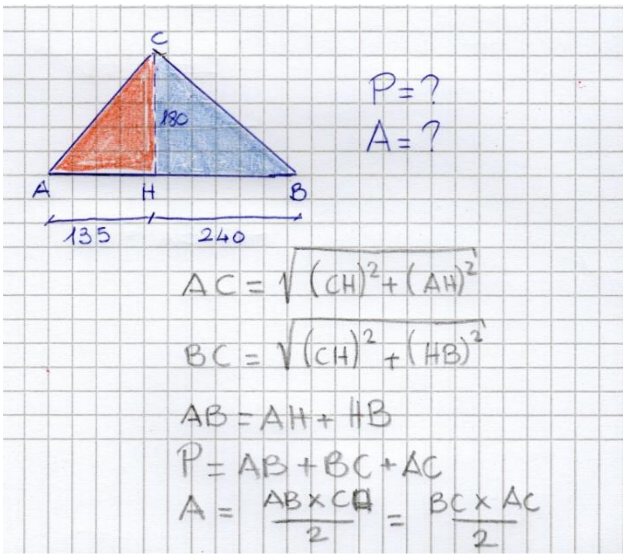
$$A_R = \frac{D\ x\ d}{2}$$

Possiamo calcolare la diagonale maggiore dalla formula inversa:

D = 2A : d = 93.25 cm

ESERCIZIO 17

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide l'ipotenusa stessa in due parti, lunghe rispettivamente 240 cm e 135 cm. Sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 180 cm, calcola perimetro ed area del triangolo



Per rispondere alle domande del problema, ci basta calcolare AC e BC applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli in cui l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo ABC.

Abbiamo

AC = $\boldsymbol{\sqrt{CH^2 + AH^2} = 225\ cm}$

BC = $\boldsymbol{\sqrt{CH^2 + HB^2} = 300\ cm}$

Siccome AB = AH + HB

Abbiamo: AB = 240 + 135 = **375 cm**

Possiamo ora calcolare perimetro ed area :

P = 225+300 + 375 = 900 cm

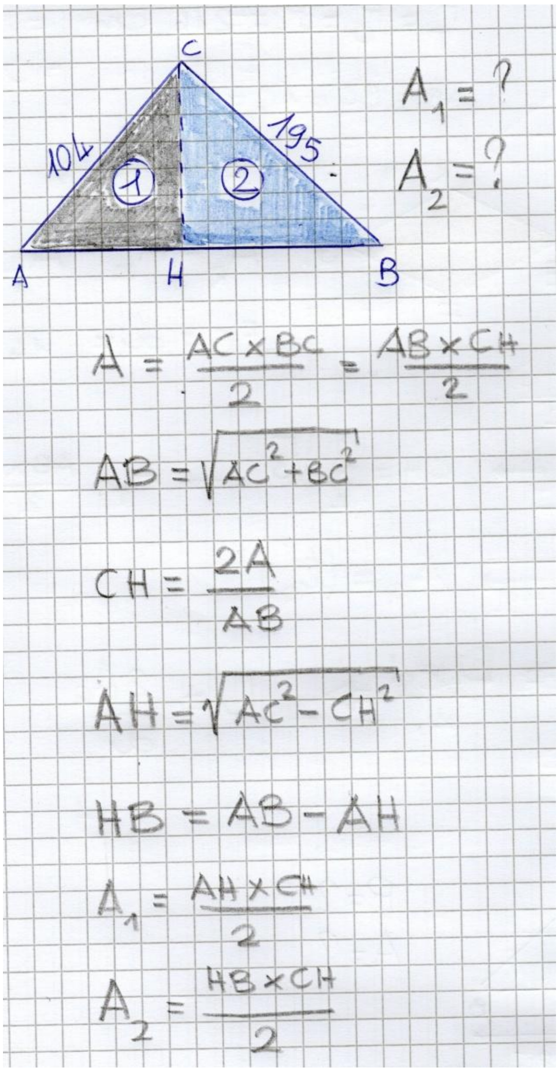
A = (225 x 300) :2 = 33750 cm^2

NOTA : possiamo calcolare l'area anche come semiprodotto della base AB per altezza CH. Il risultato non cambia:

A = (375 x 180) : 2 = cm^2

ESERCIZIO 18

In un triangolo rettangolo i due cateti misurano rispettivamente 104 cm e 195 cm. Calcola l'area dei due triangoli in cui il triangolo dato viene diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa



Forse all'inizio il problema vi sembrerà banale, ma nasconde alcune "insidie".

Infatti per poter procedere dobbiamo innanzitutto ricavare l'area del triangolo ABC:

A = (AC x BC) : 2 = (104 x 195) : 2 = 10140 cm^2

Calcoliamo ora l'ipotenusa AB applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC :

AB = $\sqrt{AC^2 + \mathrm{BC}^2} = 221\ cm$

Siccome risulta

A = (AB x CH) : 2

Possiamo ricavare CH dalla formula inversa dell'area:

CH = 2 A : AB = 91.76 cm

A questo punto, possiamo applicare il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli rettangoli che forma CH per ricavare AH oppure HB. L'altro si calcola poi come differenza con l'ipotenusa.

Calcoliamo AH

AH = = $\sqrt{AC^2 - \mathrm{CH}^2} = 48.95\ cm$

Abbiamo perciò:

HB = AB – AH = 221 – 48.95= 172.05 cm

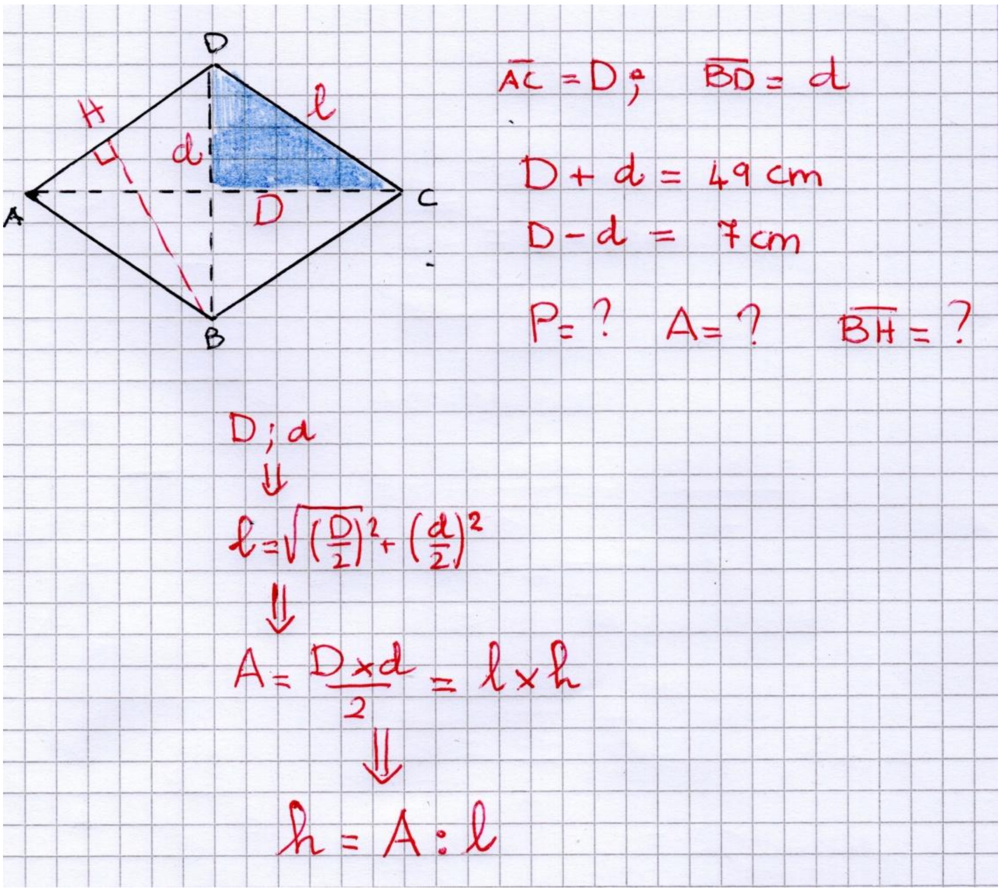
Possiamo infine calcolare le aree richieste:

A_1 = (AH x CH) : 2 = 2245.82 **cm^2**

A_2 = A – A_1 = 10140 – 2245.82 = 7894.18 **cm^2**

ESERCIZIO 19

In un rombo, la somma e la differenza delle lunghezze delle diagonali misurano rispettivamente 49 cm e 7 cm. Calcola perimetro, area e misura dell’altezza del rombo



Dall’algebra sappiamo che se di due numeri a e b, con a > b, conosciamo la somma S e la differenza D, possiamo calcolarli facilmente.

Nel nostro caso, possiamo ricavare velocemente la lunghezza delle due diagonali del rombo:

AC = D = (49 + 7) : 2 = 28 cm

BD = d = (49 – 7) : 2 = 21 cm

Possiamo ora applicare il teorema di Pitagora per calcolare il lato del rombo (triangolo rettangolo colorato):

$$l_{rombo} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Con i dati numerici a nostra disposizione otteniamo:

$$l_{rombo} = \sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2} = 17.5\ cm$$

Possiamo ora calcolare il perimetro del rombo e la sua area:

P = l x 4 = 17.5 x 4 = 70 cm

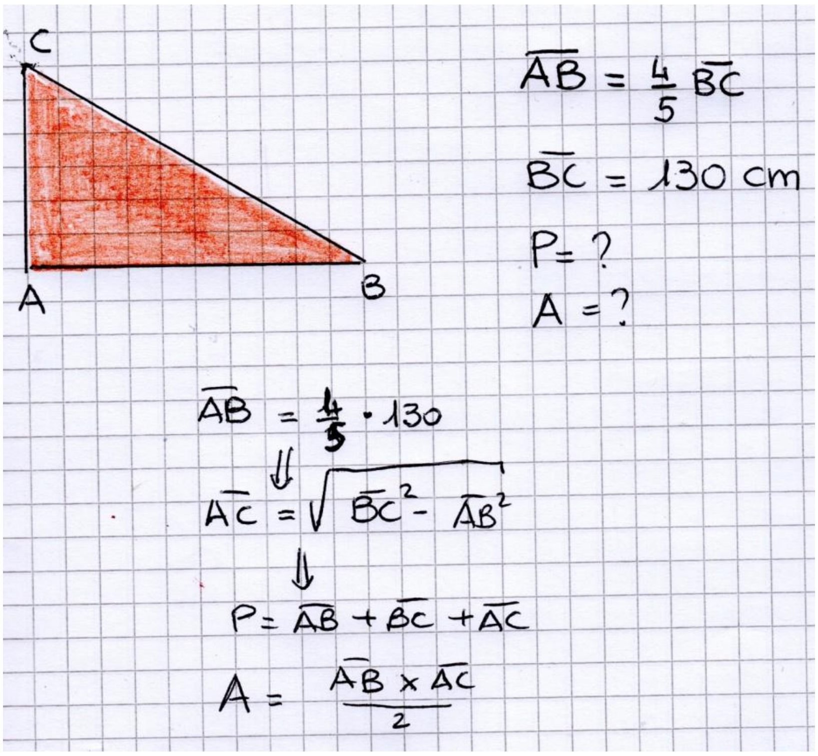
$$A = \frac{D \; x \; d}{2} = \frac{28 \; x \; 21}{2} = 294 \; cm^2$$

Siccome per tutti i quadrilateri l'area si può calcolare come prodotto della base e dell'altezza, dalla formula inversa possiamo ricavare l'altezza del rombo:

BH = A : l_{rombo} = 294 : 17.5 = 16,8 cm

ESERCIZIO 20

In un triangolo rettangolo, un cateto è pari ai 4/5 dell'ipotenusa, che misura 130 cm. Calcola perimetro ed area del triangolo.



Per calcolare area e perimetro del triangolo rettangolo ci servono le misure dei due cateti e dell'ipotenusa.

Possiamo calcolare immediatamente AB:

$$\overline{AB} = \frac{4}{5} \; x \; 130 = 104 \; cm$$

Applicando la formulazione inversa del teorema di Pitagora possiamo ora ricavare il cateto AC :

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{130^2 - 104^2} = 78 \; cm$$

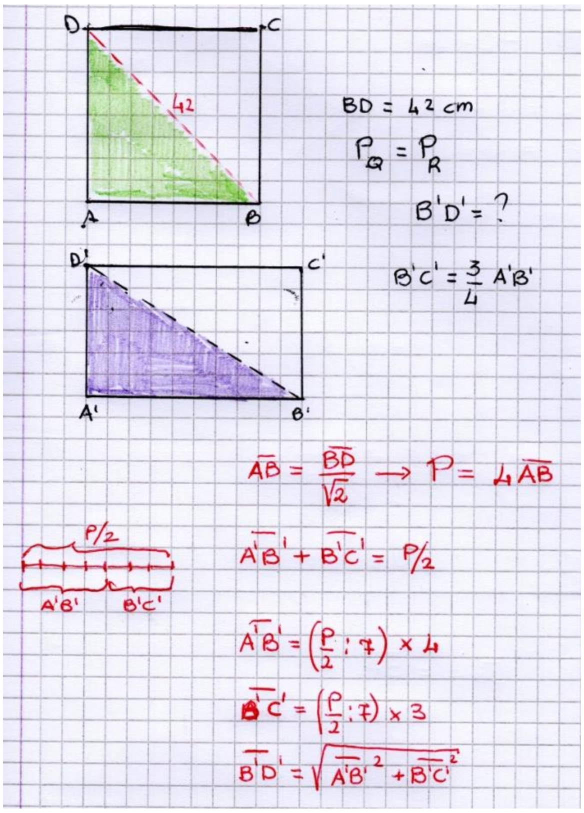
Possiamo ora rispondere alle domande del problema, calcolando il perimetro P e l'area A del triangolo rettangolo:

P = $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 130 + 78 + 104 = 312 \; cm$

A = $\frac{\overline{AB} \; x \; \overline{AC}}{2} = \frac{104 \; x \; 78}{2} = 4056 \; cm^2$

ESERCIZIO 21

Un quadrato ha la diagonale lunga 42 cm. Calcola la misura della diagonale di un rettangolo isoperimetrico ad quadrato ed avente l'altezza pari ai ¾ della base



Per poter calcolare la diagonale del rettangolo, abbiamo bisogno di conoscere le misure di base ed altezza del rettangolo, di cui conosciamo il rapporto.

Siccome quadrato e rettangolo hanno lo stesso perimetro, ci basta calcolare il lato del quadrato per disporre anche del valore del perimetro e quindi conoscere anche la somma di base ed altezza.

Calcoliamo facilmente il lato del quadrato, applicando la formula inversa del teorema di Pitagora applicato al quadrato:

$$l_{quadrato} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \frac{42}{1.414} = 29.70\ cm$$

Calcoliamo ora il perimetro delle due figure:

P = $4\ x\ l_{quadrato} = 118.8\ cm$

Possiamo ora ricavare anche la somma di base e altezza del rettangolo, pari alla metà del perimetro :

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = P : 2 = 59.4\ cm$$

Calcoliamo ora le misure che ci servono:

$$\overline{A'B'} = (59.4 : 7) x\ 4 = 33.94\ cm$$

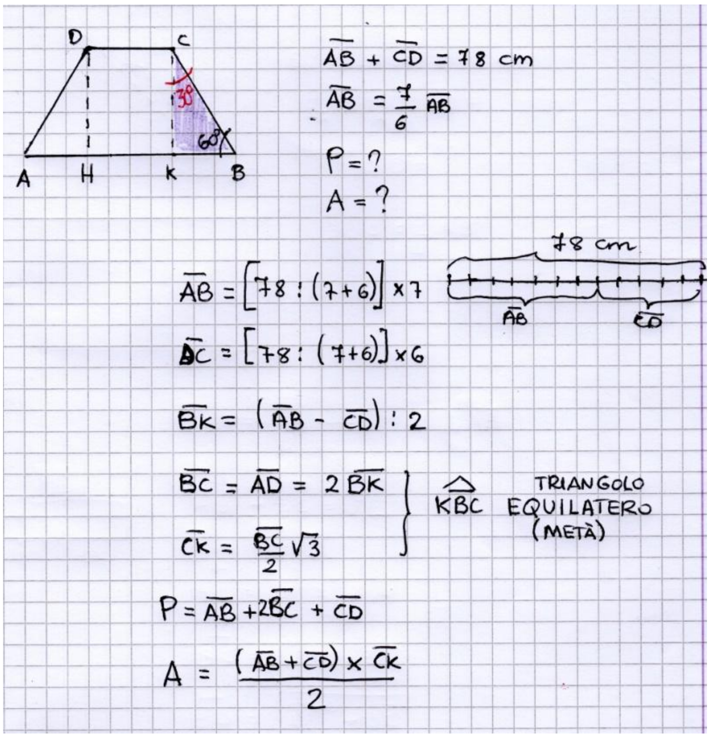
$$\overline{B'C'} = (59.4 : 7) x\ 3 = 25.46\ cm$$

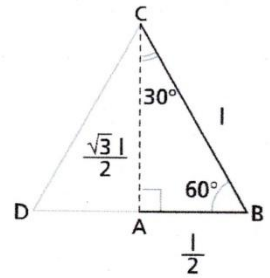
Applichiamo ora il teorema di Pitagora per calcolare la misura della diagonale del rettangolo:

$$\overline{B'D'} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'^2}} = 42.43\ cm$$

ESERCIZIO 22

In un trapezio isoscele la somma delle lunghezze delle basi misura 78 cm e una è i 7/6 dell'altra. Sapendo che ciascun angolo acuto misura 60°, calcola perimetro ed area del trapezio





Siccome gli angoli adiacenti alla base maggiore sono acuti, sappiamo che il triangolo rettangolo KBC è la metà di un triangolo equilatero, per cui possiamo calcolare velocemente il lato obliquo BC e l'altezza CK del trapezio, grazie alle formule del teorema di Pitagora applicato ai triangoli equilateri.

Calcoliamo innanzi tutto le due basi:

$$.\overline{AB} = [78 : (7+6)]\ x\ 7 = 42\ cm$$

$$\overline{DC} = [78 : (7+6)]\ x\ 6 = 36\ cm$$

Ricaviamo ora la lunghezza di BK :

$$\overline{BK} = [\overline{AB} - \overline{DC}] : 2 = 3\ cm$$

Di conseguenza il lato obliquo misura:

$$\overline{BC} = \overline{BK} x\ 2 = 6\ cm$$

E l'altezza vale

$$\overline{CK} = \frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{3} = 5{,}196$$

A questo punto non ci resta che calcolare il perimetro e l'area richiesti:

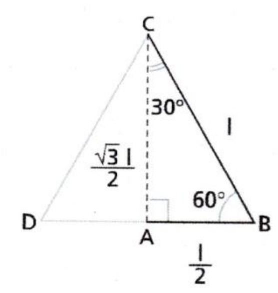
P = 78 + 12 = 90 cm

A = (78 x 5.196) : 2 = 202. 64 cm^2

ESERCIZIO 23

Un triangolo rettangolo ha un angolo acuto ampio 30° e l'ipotenusa lunga 28 cm. Calcola perimetro ed area del triangolo.

RICORDA: in un triangolo rettangolo con un angolo di 30°, il lato BC opposto a quest'angolo è la metà dell'ipotenusa!



Come nel caso precedente, possiamo applicare le formule del teorema di Pitagora riferite al triangolo equilatero. Abbiamo quindi

AB = 28 : 2 = 14 cm

AC = 14 x √3 = 24.25 cm

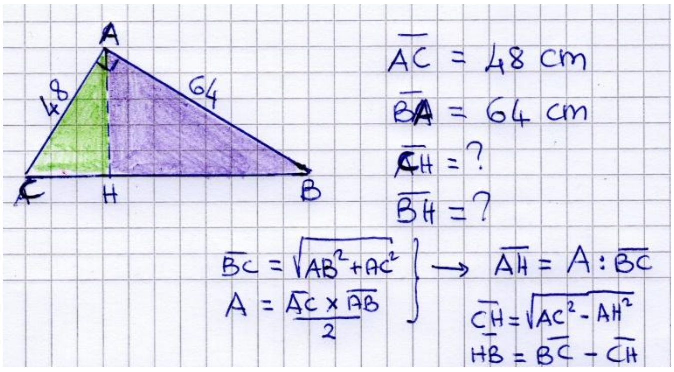
Possiamo così calcolare perimetro ed area del triangolo rettangolo:

P = 14 + 28 + 24.25 = 66.25 cm

A = (14 x 24.25) : 2 = 169.75 cm^2

ESERCIZIO 24

Nel triangolo rettangolo ABC i due cateti misurano rispettivamente 48 cm e 64 cm. Calcola la misura delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa (le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono i segmenti CH e HB, quindi per calcolarli è sufficiente applicare il teorema di Pitagora ai triangoli AHC e AHB)



Per poter calcolare le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, dobbiamo conoscere l'altezza CH, che ricaveremo dall'area. Ci serve anche il valore dell'ipotenusa, che calcoliamo applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC. Abbiamo :

$$\overline{BC} = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{64^2 + 48^2} = 80\ cm$$

Calcoliamo ora l'area del triangolo come semiprodotto dei cateti, per poter poi ricavare l'altezza AH:

A = (AC x AB) : 2 = (48 x 64) : 2 = 1536 cm^2

Siccome è anche

A = (BC x AH) : 2

Possiamo ricavare l'altezza AH:

AH = 2 A : BC = 38.4 cm

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo ACH e calcoliamo CH:

$$\overline{CH} = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{48^2 - 38.4^2} = 28.8\ cm$$

Ricaviamo infine HB

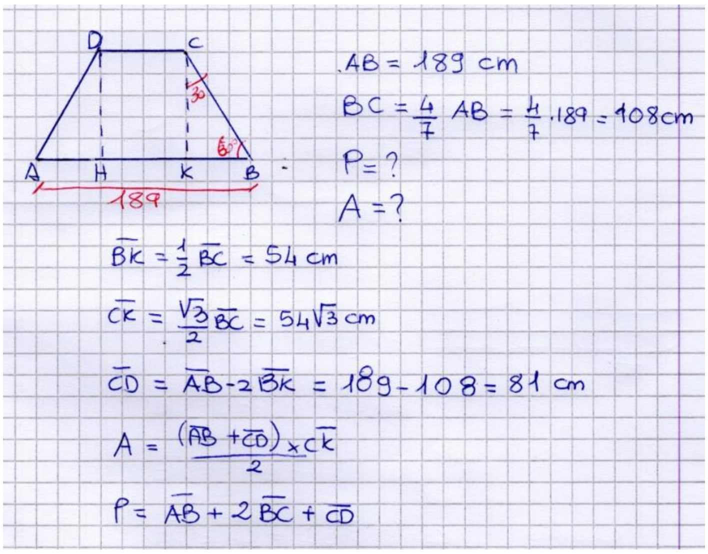
HB = BC – CH = 80 – 28.8 = 51.2 cm

ESERCIZIO 25

In un trapezio isoscele, la base maggiore misura 189 cm ed è i 7/4 di ciascun lato obliquo. Sapendo che ogni angolo acuto misura 60°, calcola perimetro ed area del trapezio

Cominciamo innanzitutto con il calcolare la lunghezza del lato obliquo:

BC = $\frac{4}{7}\,\overline{AB} = \frac{4}{7}\,x\ 189 = 108\ cm$



Il triangolo rettangolo BKC è la metà di un triangolo equilatero per cui possiamo calcolare immediatamente BK

BK = BC : 2 = 108 : 2 = 54 cm

Risulta inoltre:

$$CK = \frac{BC}{2}\sqrt{3}\ = 54\ x\ 1.732 = 93.53\ cm$$

Possiamo inoltre calcolare la base minore CD :

CD = AB – 2BK = 189 – 108 = 81 cm

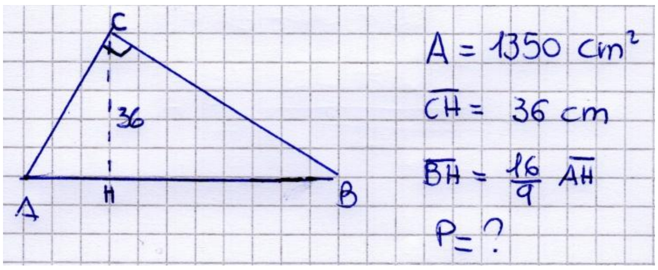
Infine possiamo rispondere alle domande del problema e calcolare il perimetro P e l'area A :

P = AB + 2 BC + CD = 189 + 2 x 108 + 81 = 486 cm

A = [(AB + CD) x CK] : 2 = 12626.55 cm^2

ESERCIZIO 26

Un triangolo rettangolo ha l'area di 1350 cm^2 e l'altezza relativa all'ipotenusa lunga 36 cm. Sapendo che quest'altezza divide l'ipotenusa in due parti, una i 16/9 dell'altra, calcola il perimetro del triangolo.



Applicando la formula inversa dell'area, possiamo ricavare il valore dell'ipotenusa:

AB = 2 A : CH = 75 cm

Siccome AH + HB = AB

Possiamo calcolare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa :

AH = [75 : (16 + 9)] x 9= 27 cm

BH = AB – AH = 75 – 27 = 48 cm

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHC e calcoliamo AC :

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 45\ cm$$

Per calcolare BC possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo HBC oppure applicare la formula inversa dell’area:

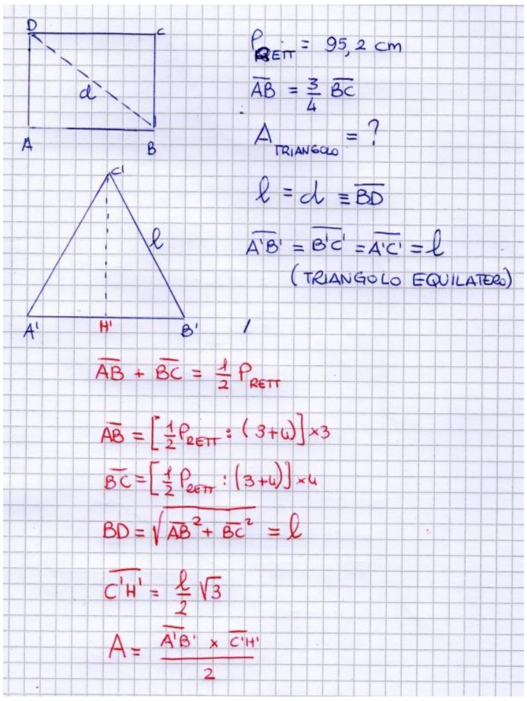
BC = 2 A : AC = 60 cm

Ora disponiamo delle lunghezze di tutti i lati e possiamo calcolare il perimetro:

P = 60 + 45 + 75 = 180 cm

ESERCIZIO 27

Il perimetro di un rettangolo misura 95,2 cm ed una dimensione è i ¾ dell’altra. Calcola l’area di un triangolo equilatero, avente il lato congruente alla diagonale del rettangolo



AB + BC = 95.2 : 2 = 47.6 cm

Possiamo calcolare velocemente AB e BC :

AB = [47.6 : (4+3)] x 3 = 20.4 cm

BC = 47.6 – 20.4 = 27.2 cm

A questo punto applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare la diagonale del rettangolo, uguale al lato del triangolo equilatero:

BD = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{27.2^2 + 20.4^2} = 34\ cm$

Per le formule del teorema di Pitagora applicato ai triangoli equilateri, possiamo calcolare subito l’altezza C’H del triangolo dato:

C’H = (34 : 2) √3 = 17 x 1.732 = 29.44 cm

L’area è quindi:

A = (A’B’ x C’H) : 2 = 500,56 cm^2

ESERCIZIO 28

In un triangolo rettangolo la somma dei due cateti misura 230 cm ed uno è gli 8/15 dell’altro. Calcola perimetro ed area del triangolo

Come ormai abbiamo imparato, possiamo calcolare rapidamente i due cateti, dal momento che conosciamo la loro somma e il loro rapporto:

Cateto 1 = (230 : 23) x 8= 80 cm

Cateto 2 = 10 x 15 = 150 cm

Possiamo quindi calcolare l’ipotenusa applicando il teorema di Pitagora:

$$\text{Ipotenusa} = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{80^2 + 150^2} = 170\ cm$$

Possiamo ora calcolare il perimetro P e l'area A del triangolo dato:

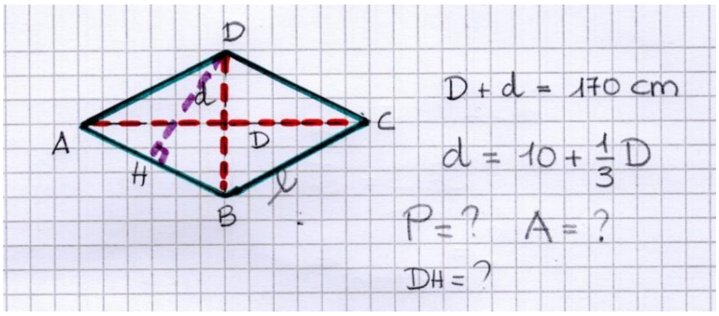
P = 170 + 80 + 150 = 400 cm

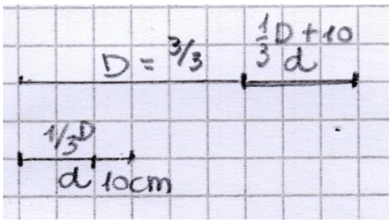
A = (150 x 80) : 2 = 6000 **cm^2**

ESERCIZIO 29

In un rombo la somma delle lunghezze delle diagonali misura 170 cm e la lunghezza della minore supera di 10 cm 1/3 della maggiore. Calcola perimetro, area e misura dell'altezza del rombo.

Per rispondere alle domande del problema ci servono le lunghezze delle diagonali e la misura del lato. Per trovare la diagonale maggiore e quella minore dobbiamo ragionare sui dati che ci sono forniti.





Come potete vedere dallo schema a lato, possiamo scrivere:

D + 1/3 D = 170 -10

Da cui

4/3 D = 160

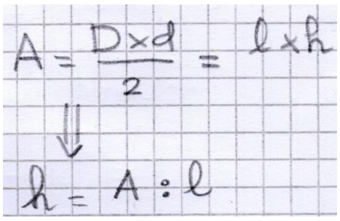
Di conseguenza:

D = [(170 – 10) : 4] x 3 = (160 : 4) x 3 = 40 x 3 = 120 cm

d = D : 3 + 10 = 40 + 10 = 50 cm

Possiamo ora calcolare il lato del rombo, applicando il teorema di Pitagora ad uno dei quattro triangoli rettangoli in cui le diagonali dividono il rombo. Abbiamo:

$$l_{rombo} = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{60^2 + 25^2} = 65\ cm$$



Il perimetro del rombo misura quindi:

P = $l_{rombo}\ x\ 4 = 260\ cm$

Possiamo calcolare l'area del rombo come semiprodotto delle diagonali ma anche come lato per altezza.

Abbiamo:

$A_{\ rombo} = \frac{D\ x\ d}{2}$ = 3000 cm^2

Siccome è pure

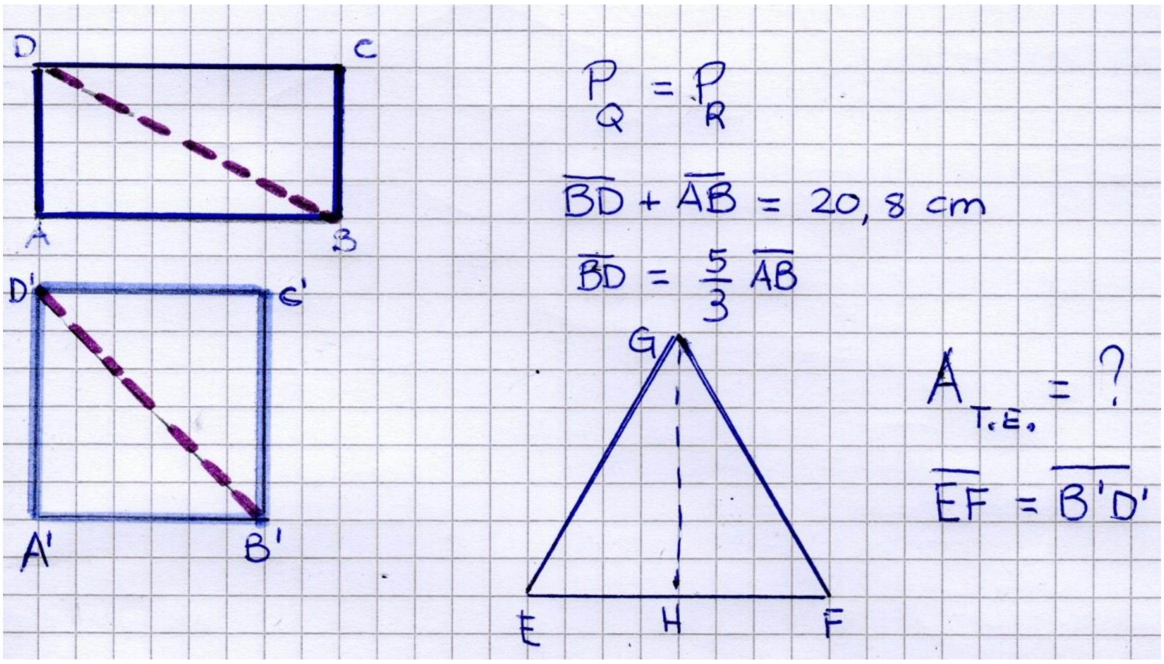
$$A_{rombo} = l \, x \, DH$$

Possiamo calcolare l’altezza del rombo dalla formula inversa:

$$DH = A_{rombo} : l = 46.15 \; cm$$

ESERCIZIO 30

Un rettangolo e un quadrato sono isoperimetrici. La somma delle lunghezze della diagonale e della base del rettangolo misura 20,8 cm e una è i 5/3 dell’altra. Calcola l’area di un triangolo equilatero avente il lato congruente alla diagonale del quadrato (approssima a due cifre decimali)



Il problema ci chiede di calcolare l’area di un triangolo equilatero con il lato uguale alla diagonale del quadrato. Dobbiamo quindi trovare questo dato.

Per determinarlo, ci serve il lato del quadrato, che possiamo ricavare dal perimetro del rettangolo. Infatti le due figure hanno lo stesso perimetro.

Quindi ci servono le misure di base e altezza del rettangolo.

Conosciamo la somma della base e della diagonale e il loro rapporto, per cui possiamo calcolare le loro dimensioni:

BD = [20.8 : (5+3)] x 5 = 13 cm

AB = [20.8 : (5+3)] x 3 = 7.8 cm

Applichiamo il teorema di Pitagora nella sua forma inversa per calcolare l’altezza del rettangolo:

$$\mathrm{BC} = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 7.8^2} = \; 10.4 \; cm$$

Possiamo ora calcolare il perimetro di rettangolo e quadrato:

P = 2 x 7.8 + 2 x 10.4 = 36.4 cm

Il lato del quadrato misura quindi:

l = P : 4 = 9.1 cm

Possiamo ora calcolare la diagonale del quadrato, uguale al lato del triangolo equilatero:

B'D' = 9.1 x √2 = 12.87 cm

Possiamo ora calcolare l'altezza del triangolo equilatero, che per il teorema di Pitagora è :

$$GH = \frac{EF}{2}\sqrt{3} = 11.14\ cm$$

Possiamo infine calcolare l'area del triangolo equilatero:

$$A_{\text{(triangolo equilatero)}} = EF \times GH : 2 = 71.68\ cm^2$$