ESERCIZIO 1

Determina le coordinate del punto medio del segmento AB che ha per estremi i punti con le seguenti coordinate.

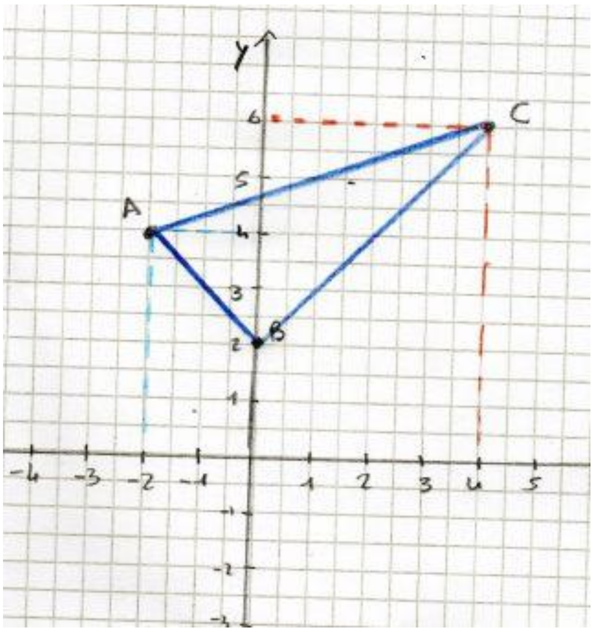
- A(1/2, - 5), B(6; 4)
- A (1/3;-4), B (-1/2;1/2)
- A (-3;1/4), B (6;3/4)
- A(2/3;1/3), B (1/3;-1/3)

ESERCIZIO 2

Dopo aver disegnato il triangolo ABC, di vertici

- A (-2;4)
- B (0;2)
- C (4;6)

determina i punti medi dei tre lati.



Disegniamo innanzitutto il triangolo.
Individuiamo così i tre lati AB, AC e BC.

Per ognuno calcoliamo il punto medio:

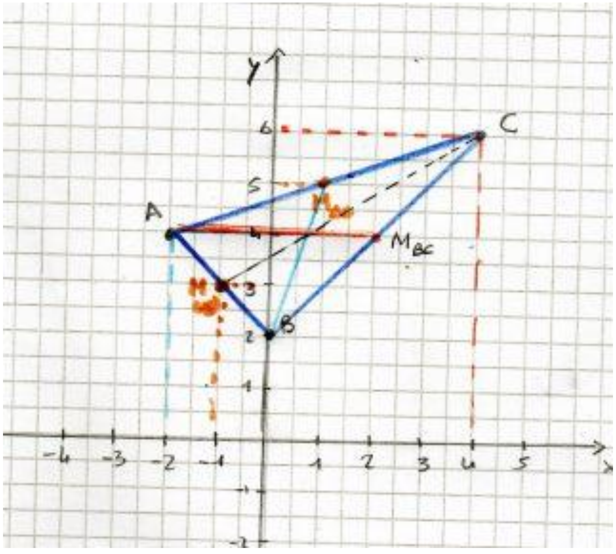
Per il LATO AB abbiamo

- $x_{M\ (AB)} = (-2 +0) : 2 = -1$
- $y_{M\ (AB)} =(4 +2): 2 = 3$

Il punto medio di AB è quindi $M_{(AB)}$ = (-1;3)

Per il LATO AC abbiamo

- $x_{M\ (AC)} = (-2 +4) : 2 = 1$
- $y_{M\ (AC)} =(4 +6): 2 = 5$



Il punto medio di AC è quindi $M_{(AC)}$ = (1;5).

Infine, per il LATO BC abbiamo

- $x_{M\ (BC)} = (0 + 4) : 2 = 2$
- $y_{M\ (BC)} =(2+6): 2 = 4$

Il punto medio di BC è quindi $M_{(BC)}$ = (2;4).

Passiamo ora al calcolo delle mediane. Ricordiamo che, per calcolare le mediane, dobbiamo semplicemente calcolare la distanza tra il punto medio di un lato e il lato opposto a quel lato.

Abbiamo quindi :

- d(A,$M_{(BC)}$) = 4
- d(B,$M_{(AC)}$) = √10
- d(C,$M_{(AB)}$) = √34

ESERCIZIO 3

Determina sull'asse y il punto EQUIDISTANTE da A (-3; 2) e B (-1; 3)

RISOLUZIONE :

per trovare un punto equidistante da altri due, dobbiamo imporre che il punto C sia tale che :

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ \overline{AC} = \overline{BC} \end{cases}$$

Ovvero tradurre in linguaggio matematico il fatto che il punto appartenga all'asse y (x_C = 0) e che la sua distanza sia la stessa da A e da B.

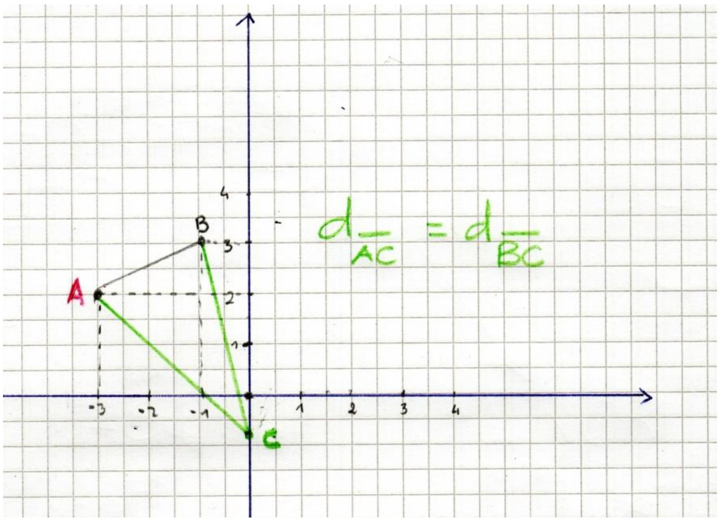
Dobbiamo quindi risolvere il sistema con le relazioni che individuano le coordinate di tale punto. Abbiamo

$$\begin{cases} x_C = 0 \; (il\ punto\ appartiene\ all'assey) \\ \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle coordinate di A e B, oltre a $x_C = 0$, otteniamo

$$\sqrt{(-3 - 0)^2 + (2 - y_C)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (3 - y_C)^2}$$

Siccome i due radicali sono entrambi positivi, essendo somma di quantità non negative (i quadrati non sono mai negativi!), possiamo elevare entrambi i membri dell'equazione al quadrato. Otteniamo



$$9 + (2 - y_C)^2 = 1 + (3 - y_C)^2$$

Svolgiamo i quadrati dei binomi :

$$9 + 4 + {y_C}^2 - 2y_C = 1 + 9 - 6y_C + {y_C}^2$$

Risolviamo quindi l'equazione rimasta:

$$\cancel{9} + 4 + \cancel{{y_C}^2} - 2y_C = 1 + \cancel{9} - 6y_C + \cancel{{y_C}^2}$$

$$4y_C = -3$$

$$y_C = -\frac{3}{4}$$

Il punto cercato è quindi

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

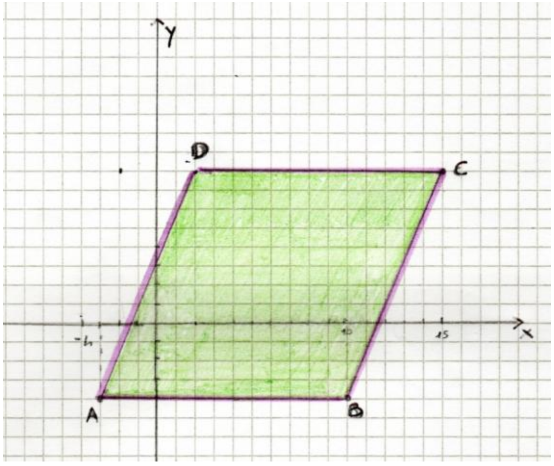
ESERCIZIO 4

Verifica che il quadrilatero di vertici

- A(- 3;- 4)
- B (10; - 4)
- C(15; 8)
- D (2; 8)

è un rombo e determina la misura dell'area

RISOLUZIONE



Per dimostrare che la figura disegnata sia un rombo, dobbiamo controllare che i quattro lati siano uguali.

Calcoliamo quindi la lunghezza dei quattro lati, AB, BC, CD, AD.

Applicando la formula

$$AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

Abbiamo

$$\overline{AB} = \sqrt{(10+3)^2 + (-4+4)^2} = 13$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(15-10)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(2-15)^2 + (8-8)^2} = 13$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(2+3)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

I quattro lati sono quindi uguali. Per calcolare l’area del rombo, dobbiamo calcolare la lunghezza delle diagonali AC e BD. Con la stessa formula applicata prima, abbiamo:

$$\overline{AC} = \sqrt{(15+3)^2 + (8+4)^2} = 21.6$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(2-10)^2 + (8+4)^2} = 14.4$$

Possiamo ora calcolare l’area del rombo:

$$A = \frac{D \circ d}{2} = 155.52$$

ESERCIZIO 5

Verifica che il triangolo di vertici

- A (-2;-3)
- B (3; -1/2)
- C (-8;9)

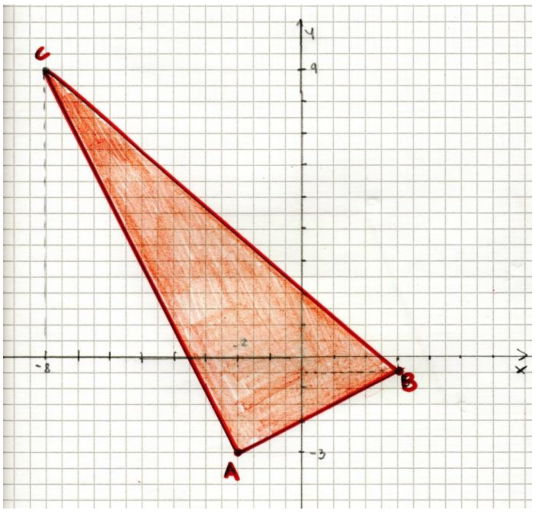
è rettangolo e poi verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa

RISOLUZIONE

Perché un triangolo sia rettangolo, la lunghezza dei suoi lati deve soddisfare il teorema di Pitagora :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dove $\begin{cases} \text{a, b} = \text{cateti} \\ c = ipotenusa \end{cases}$



Disegniamo i punti dati e uniamoli in modo da formare il triangolo assegnato. In questo caso i cateti sono i lati AC e AB, mentre l'ipotenusa è il lato BC.

Calcoliamo la lunghezza dei tre segmenti e poi verifichiamo se soddisfano il teorema di Pitagora. Abbiamo

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+2)^2 + \left(-\frac{1}{2}+3\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-8+2)^2 + (9+3)^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-8-3)^2 + \left(9+\frac{1}{2}\right)^2} = 13\sqrt{5}$$

Verifichiamo che i tre lati soddisfino il teorema di Pitagora:

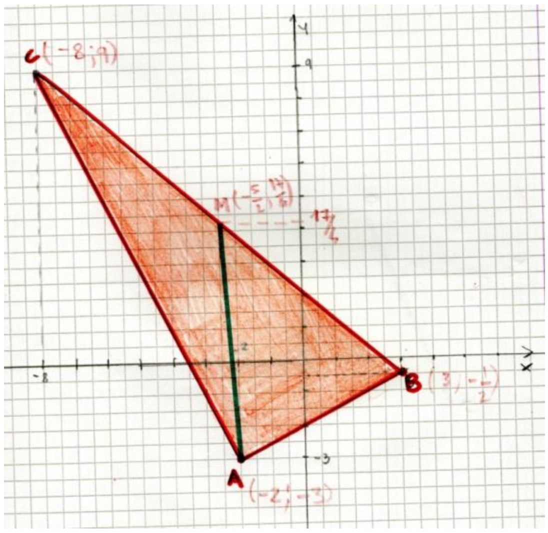
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

Infatti risulta :

$$\frac{125}{4} + 180 = \frac{845}{4}$$

Ci resta ora da individuare il punto medio dell'ipotenusa e poi da calcolare la lunghezza della mediana AM, per verificare infine che AM = ½ BC = 6.5 √5

Calcoliamo le coordinate di M:



$$\begin{cases} x_M = -\dfrac{5}{2} \\ y_M = \dfrac{17}{4} \end{cases}$$

Per la lunghezza di AM abbiamo:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{17}{4}+3\right)^2} = \frac{13}{2}\sqrt{5}$$

Che è proprio il valore ipotizzato

(13/2 = 6.5)

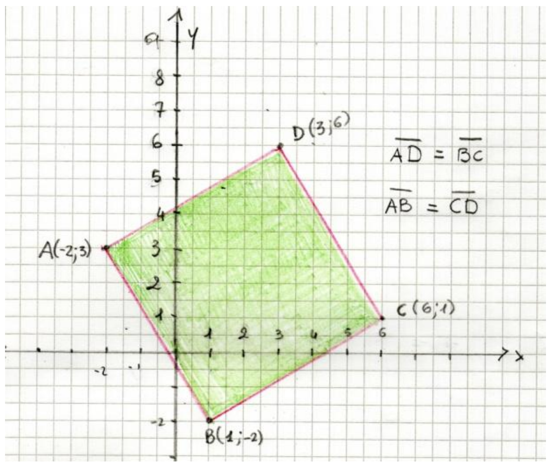
ESERCIZIO 6

Verifica che il quadrilatero di vertici A (-2;3), B (1;-2), C (6;1), D (3;6) è un quadrato

RISOLUZIONE

Un quadrato è tale se i lati opposti sono paralleli e tutti di uguale lunghezza. Dobbiamo quindi verificare che

AB = BC = CD = AD



Deve inoltre essere

$$\begin{cases} r_{AB} \,||\, r_{CD} \\ r_{AD} \,||\, r_{BC} \end{cases}$$

Calcoliamo la lunghezza dei vari segmenti:

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{34}$$

La figura data è un quadrato, essendo i quattro lati uguali.

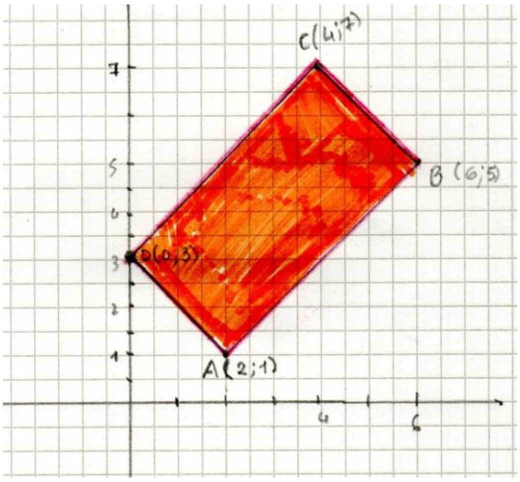
In seguito dimostreremo che le rette per i punti dati sono parallele e che

$$r_{AB} \perp r_{BC} \perp r_{CD} \perp r_{AD}$$

ESERCIZIO 7

Il quadrilatero di vertici A (2;1). B (6;5), C (4;7) D (0;3) è un rettangolo. Trova i punti medi di ciascun lato, congiungili e stabilisci di che quadrilatero si tratta. Calcolane poi perimetro ed area

RISOLUZIONE



Un rettangolo è tale se i lati opposti sono paralleli e di uguale lunghezza. Dobbiamo quindi verificare che

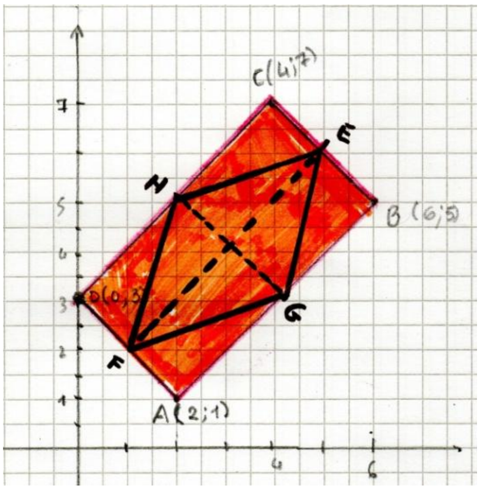
$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases}$$

Abbiamo

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$$

Calcoliamo i punti medi dei quattro lati. Unendoli, otterremo un rombo. Il lato del rombo avrà lunghezza pari a



$$l_{rombo} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{10}$$

Risulta poi

EF = AB

GH = BC

Possiamo quindi calcolare perimetro ed area del rombo:

$$P = l_{rombo}\ x\ 4 = 4\sqrt{10}$$

$$A = \frac{16}{2} = 8$$

ESERCIZIO 8

Dato il triangolo ABC di vertici A(1;1), B (7;3) e C (3;5), stabilisci se è isoscele rispetto alla base AB. Determina quindi i punti medi M_1 ed M_2 dei lati obliqui e verifica che il segmento M_1M_2 è uguale alla metà di AB.

Calcola infine la posizione del baricentro

RISOLUZIONE

Dobbiamo innanzitutto verificare che risulti

AB = BC

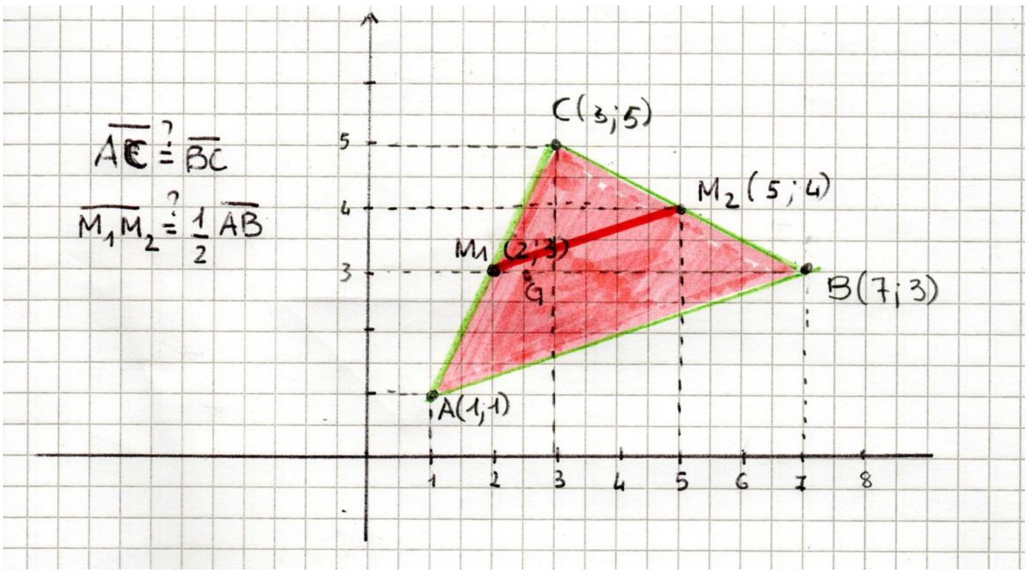
Calcoleremo poi la posizione dei punti medi dei due lati obliqui, M_1 ed M_2 e verificheremo che risulti

$$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$$

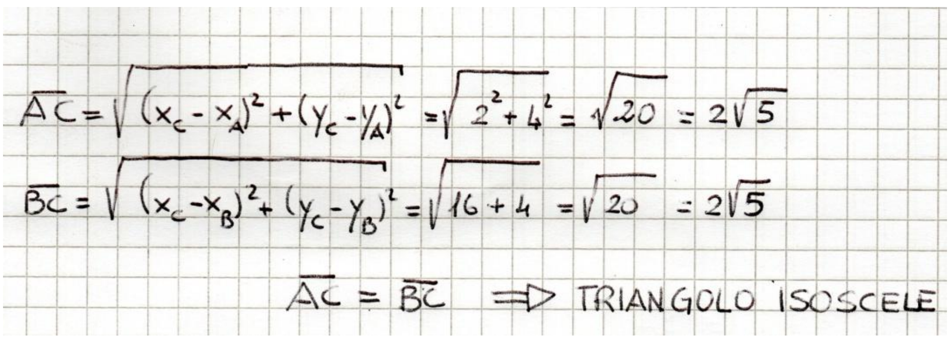
Infine dovremo semplicemente applicare le formule per il calcolo delle coordinate del baricentro:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Cominciamo a disegnare il triangolo dato e poi, man mano che troveremo gli altri punti, li aggiungeremo sul diagramma cartesiano.



Applicando la formula per il calcolo della distanza tra punti verifichiamo che il triangolo sia isoscele:



$$\overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = 2\sqrt{5}$$

Il triangolo è quindi isoscele rispetto alla base AB.

Calcoliamo intanto anche la lunghezza di AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 2\sqrt{10}$$

Applichiamo ora le formule per il calcolo delle coordinate dei punti medi di AC e BC:

$$M_1 : \begin{cases} x_{M_1} = \frac{x_A + x_C}{2} = 2 \\ y_{M_1} = \frac{y_A + y_C}{2} = 3 \end{cases} \qquad M_2 : \begin{cases} x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} = 5 \\ y_{M_2} = \frac{y_B + y_C}{2} = 4 \end{cases}$$

Calcoliamo ora la lunghezza di M_1M_2:

$$\overline{\mathrm{M_1M_2}} = \sqrt{\left(x_{M_2} - x_{M_1}\right)^2 + \left(y_{M_2} - y_{M_1}\right)^2} = \sqrt{10} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$$

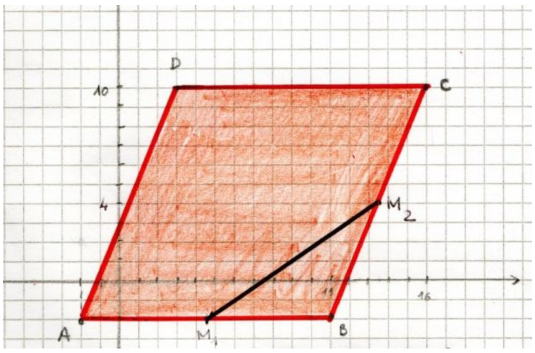
Non ci resta che applicare le formule per il calcolo del baricentro del triangolo:

$$G : \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{11}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 9

Dato il rombo di coordinate A(-2; - 2), B(11; -2), C (16;10) e D (3;10), calcolane il perimetro. Determina poi i punti medi di AB e BC, M_1 ed M_2 , e calcola la lunghezza del segmento M_1M_2 che li congiunge

RISOLUZIONE



Disegniamo il rombo e calcoliamo la lunghezza di uno qualsiasi dei suoi lati. Per semplificarci i calcoli, ci conviene calcolare AB oppure DC, entrambi aventi la stessa ascissa. Abbiamo:

AB = $|y_B - y_A|$ = 13

Il perimetro misura quindi

P = 4 AB = 4 x 13 = 52

Calcoliamo i punti medi di AB e BC:

$$M_1 : \begin{cases} x_{M_1} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9}{2} \\ y_{M_1} = \frac{y_A + y_B}{2} = -2 \end{cases} \qquad M_2 : \begin{cases} x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{27}{2} = 13.5 \\ y_{M_2} = \frac{y_B + y_C}{2} = 4 \end{cases}$$

Non ci resta che calcolare la loro distanza:

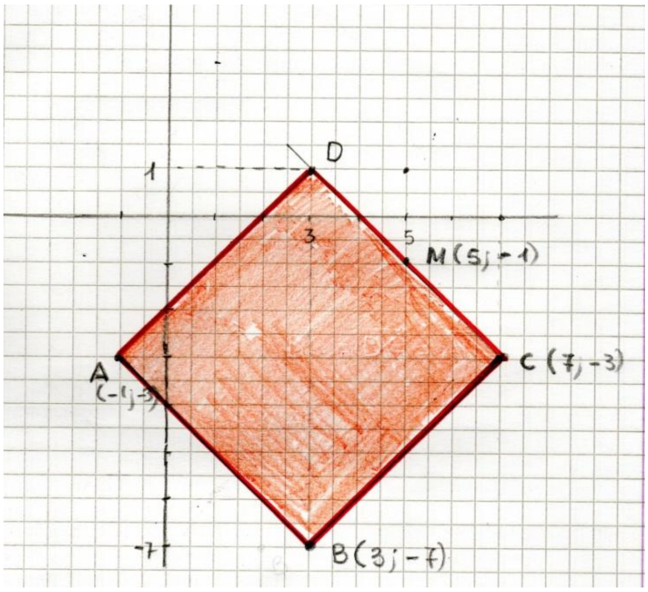
$$\overline{\mathrm{M_1M_2}} = \sqrt{\left(x_{M_2} - x_{M_1}\right)^2 + \left(y_{M_2} - y_{M_1}\right)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

ESERCIZIO 10

Il quadrilatero di vertici A(-1;-3), B (3;-7), C (7; -3) e D è un quadrato. Determina le coordinate di D sapendo che il punto medio del segmento DC è M (5;- 1). Calcola poi perimetro e area del quadrato

RISOLUZIONE

Conoscendo le coordinate del punto medio del lato DC, possiamo calcolare facilmente le coordinate del punto D.



Siccome :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_C + x_D}{2} \\ y_M = \dfrac{y_C + y_D}{2} \end{cases}$$

Possiamo ricavare :

$$\begin{cases} x_D = 2x_M - x_C = 3 \\ y_D = 2y_M - y_C = 1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora calcolare la lunghezza di uno qualsiasi dei lati per ricavare area e perimetro.

Calcoliamo BC :

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Il perimetro è quindi :

$$P = 4 \times BC = 16\sqrt{2}$$

L'area è infine

$$A = (BC)^2 = 32$$

[D (3;1), , 32]