IL METODO DI CRAMER
La soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

con a, a_1, b, $b_1 \neq 0$.

è data dalle formule:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}$$
$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$
$$con\ ab_1 - a_1b \neq 0$$

Esaminiamo ora un metodo semplice per ricordare queste formule. Utilizzeremo i determinanti.
Chiamiamo **DETERMINANTE** del sistema il numero D definito da

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1$$

Scriviamo poi altri due determinanti, D_x e D_y:

- D_x è il determinante ottenuto da quello del sistema sostituendo, nella prima colonna, i termini noti ai coefficienti di x:

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = cb_1 - bc_1$$

- D_y è il determinante ottenuto da quello del sistema sostituendo, nella seconda colonna, i termini noti ai coefficienti di y:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = ac_1 - ca_1$$

Le soluzioni del sistema diventano così:

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b} = \frac{D_x}{D}$$
$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} = \frac{D_y}{D}$$

Ricapitoliamo il METODO DI CRAMER
1. Calcoliamo il determinante del sistema:
2. Calcoliamo il determinante Dx :
3. Calcoliamo il determinante Dy:
4. Calcoliamo la soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D}$$
$$y = \frac{D_y}{D}$$

CALCOLO DEI DETERMINANTI
Calcola il determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Ricordiamo che, in generale

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \circ (-1) - 4 \circ 3 = -14$$

Esercizi proposti

Calcola i seguenti determinanti.

1. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
2. $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$
3. $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$
4. $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$
5. $D = \begin{vmatrix} 2a^2 & 3a^3 \\ -5a & 4a^2 \end{vmatrix}$
6. $D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a+2b & 3a-3b \end{vmatrix}$

ESEMPIO 2

Utilizzando il metodo di Cramer, risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7$$

Calcoliamo D_x, ottenuto da D sostituendo la prima colonna dei coefficienti di x con i termini noti (colonna in verde invece di quella in rosso):

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 30 = 14$$

Calcoliamo D_y, ottenuto da D sostituendo la seconda colonna dei coefficienti di y con i termini noti:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Calcoliamo la soluzione:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{7} = 0$$

ESERCIZI PROPOSTI

Utilizzando il metodo di Cramer, risolvi i seguentI sistemi :

1. $\begin{cases} 2x + 4y - 1 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0 \end{cases}$ $(-\frac{1}{8}, \frac{5}{16})$

2. $\begin{cases} x + 4y - 2 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ $[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}]$

3. $\begin{cases} -x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$ $[\frac{1}{5}, \frac{8}{5}]$

4. $\begin{cases} x = y - 2 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$ $[5,7]$

5. $\begin{cases} 4x - 6y + 1 = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ $[impossibile]$

6. $\begin{cases} (-y + 1)\,(-y - 1) = (y - 1)^2 + 2x \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$ $[4,5]$

7. $\begin{cases} (\frac{3}{2}x - 4)^2 - \frac{x^2}{2} = 2\,(x^2 - 2y) \\ \left(1 - \frac{y}{2}\right)\left(-1 - \frac{y}{2}\right) = y\,(1 + 0.25y) \end{cases}$ $[3,5]$