

METODO DI EUCLIDE O DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE

Abbiamo imparato a calcolare il M.C.D. ed il m.c.m tra due o più numeri con il metodo della scomposizione in fattori primi. Esiste però un altro metodo, detto delle DIVISIONI SUCCESSIVE, attribuito al grande matematico greco EUCLIDE.

È uno degli algoritmi più antichi conosciuti, essendo presente negli *Elementi* di [Euclide](#) intorno al 300 a.C.; tuttavia, probabilmente l'algoritmo non è stato scoperto da Euclide, ma potrebbe essere stato conosciuto anche 200 anni prima. Certamente era conosciuto da [Eudosso di Cnido](#) intorno al 375 a.C.; [Aristotele](#) (intorno al 330 a.C.) ne ha fatto cenno ne *I topici*, 158b, 29-35. L'algoritmo non richiede la fattorizzazione dei due interi.

METODO DI EUCLIDE O DELLE DIVISIONI SUCCESSIVE per il calcolo del M.C.D.

La regola dice che:

Per calcolare il M.C.D. tra due numeri a e b , M.C.D. (a,b) , con $a > b$, dobbiamo dividere il maggiore a per il minore (b) :

- se il resto della divisione è zero, b è il M.C.D. dei due numeri
- se il resto è DIVERSO da ZERO, dividiamo il divisore per tale resto e continuiamo fino ad ottenere resto zero. Il divisore dell'ultima divisione è il M.C.D. (a,b)

ESEMPIO 1

Calcoliamo il MCD tra 25 e 75

Dividiamo il maggiore per il minore:

$$75 : 25 = 3 \text{ con resto} = 0$$

Quindi risulta

$$\text{M.C.D. } (25,75) = 25$$

ESEMPIO 2

Supponiamo ora di voler calcolare il MCD tra 65 e 25

$A : B = a$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $65 : 25 = 2$
 r. 15
 $25 : 15 = 1$
 r. 10
 $15 : 10 = 1$
 r. 5
 $10 : 5 = 2$
 r. 0

1) Dividiamo il numero maggiore per il minore.
 2) Procediamo con successive divisioni in cui il divisore diventa dividendo e il resto diventa divisore fino ad ottenere il resto zero; l'ultimo resto diverso da zero è il M.C.D. cercato.

M.C.D. (65; 25) = 5.

ESEMPIO 3 :

Calcoliamo il MCD tra 28 e 70

| | |
|---|----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $70 : 28 = 2$ con resto $R = 14$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (28) per il resto ottenuto | $28 : 14 = 2$ con resto $R = 0$ |
| | 14 è il nostro MCD |

M.C.D. (28,70) = 14

ESEMPIO 4

Un ultimo esempio

Vogliamo calcolare il MCD tra 35 e 100

| | |
|---|-----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $100 : 35 = 2$ con resto $R = 30$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (35) per il resto ottenuto | $35 : 30 = 1$ con resto $R = 5$ |
| Dividiamo 30 per il resto ottenuto | $30 : 5 = 6$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 5 |

M.C.D. (35,100) = 5

Che cosa succede se i numeri sono più di due?

Calcoliamo il MCD tra due di essi, poi il MCD tra uno dei restanti numeri e il MCD trovato prima e via di seguito fino a terminare i numeri

ESEMPIO 1

Calcoliamo MCD tra 20, 30 e 85

- Iniziamo calcolando M.C.D. (20,30)

| | |
|---|----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $30 : 20 = 1$ con resto $R = 10$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (20) per il resto ottenuto | $20 : 10 = 2$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 10 |

M.C.D. (20,30) = 10

- Calcoliamo ora il MCD tra il numero rimasto (85) e il M.C.D. (20,30) = 10 cioè calcoliamo M.C.D. (10,85)

| | |
|---|---------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $85 : 10 = 8$ con resto $R = 5$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (10) per il resto ottenuto | $10 : 5 = 2$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 5 |

In definitiva : M.C.D. (20,30,85) = 5

ESERCIZI

Determina il MCD dei seguenti numeri con il metodo delle divisioni successive

- MCD (450,156) [R: 6]
- MCD (875,450) [R: 25]
- MCD (420,108) [R: 12]
- MCD (378,234) [R: 18]
- MCD (245,1155) [R: 35]
- MCD (594,1053) [R: 27]
- MCD (147,1995) [R: 21]
- MCD (216,2880) [R: 72]

METODO DI EUCLIDE per il calcolo del m.c.m.

Il metodo di Euclide ci permette di calcolare anche il m.c.m. tra due o più numeri.

La regola dice che

Per calcolare il m.c.m. tra due numeri a e b, m.c.m.(a,b) :

si calcola il loro M.C.D.

si divide uno dei due numeri per tale MCD

si moltiplica il quoziente ottenuto per l'altro numero. Il risultato di questa moltiplicazione è il m.c.m.(a,b) cercato

Vediamo con un paio di esempi

ESEMPIO 1:

calcoliamo m.c.m.(56,24)

Calcoliamo innanzitutto il loro MCD con il metodo di prima:

| | |
|---|---------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $56 : 24 = 2$ con resto $R = 8$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (24) per il resto ottenuto | $24 : 8 = 3$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 8 |

Dividiamo ora uno dei due numeri per questo MCD. Ad esempio

$$56 : 8 = 7$$

Moltiplichiamo questo quoziente per l'altro numero :

$$7 \times 24 = 168$$

Risulta quindi :

$$\text{m.c.m.}(56,24) = 168$$

ESEMPIO 2

Proviamo a calcolare m.c.m.(75,60)

Calcoliamo innanzitutto il loro MCD con il metodo di prima:

| | |
|---|----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $75 : 60 = 1$ con resto $R = 15$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (60) per il resto ottenuto | $60 : 15 = 4$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 15 |

Dividiamo ora uno dei due numeri per questo MCD. Ad esempio

$$75 : 15 = 5$$

Moltiplichiamo questo quoziente per l'altro numero :

$$5 \times 60 = 300$$

Risulta quindi :

$$\text{m.c.m.}(75,60) = 300$$

Allo stesso modo si procede se i numeri sono più di due: si calcola il m.c.m. tra i primi due, poi il m.c.m. tra il terzo e il m.c.m. dei primi due e via di seguito fino a terminare i numeri

ESEMPIO

Calcoliamo m.c.m. (40,15,27)

- Cominciamo calcolando m.c.m. (40,15)

| | |
|--|----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $40 : 15 = 2$ con resto $R = 10$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (15) per il resto ottenuto | $15 : 10 = 1$ con resto $R = 5$ |
| Dividiamo ancora il precedente divisore (10) per il resto ottenuto | $10 : 5 = 2$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 5 |

Dividiamo ora uno dei due numeri per questo MCD. Ad esempio

$$40 : 5 = 8$$

Moltiplichiamo questo quoziente per l'altro numero :

$$8 \times 15 = 120$$

Risulta quindi :

$$\text{m.c.m.}(40,15) = 120$$

Calcoliamo ora m.c.m. (120,27)

| | |
|--|-----------------------------------|
| dividiamo il maggiore per il minore | $120 : 27 = 4$ con resto $R = 12$ |
| Dividiamo ora il precedente divisore (27) per il resto ottenuto | $27 : 12 = 2$ con resto $R = 3$ |
| Dividiamo ancora il precedente divisore (12) per il resto ottenuto | $12 : 3 = 4$ con resto $R = 0$ |
| | il nostro MCD è quindi 3 |

Dividiamo ora uno dei due numeri per questo MCD. Ad esempio

$$120 : 3 = 40$$

Moltiplichiamo questo quoziente per l'altro numero :

$$40 \times 27 = 1080$$

Risulta quindi :

$$\text{m.c.m.}(40,15,27) = 1080$$

ESERCIZIO 1

Calcola m.c.m. e M.C.D. con il metodo delle divisioni successive per le seguenti coppie di numeri

- 24,28
- 30,36
- 42,63
- 54,30
- 35,75
- 48,56
- 135,180
- 561,255
- 380,285

ESERCIZIO 2

Calcola m.c.m. e M.C.D. con il metodo delle divisioni successive per le seguenti terne di numeri

- 210,420,150

- 390,546,312
- 270,50,990
- 340,135,225
- 125,56,88
- 150,294,960