SISTEMI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE
LE EQUAZIONI LINEARI IN DUE INCOGNITE
Consideriamo le due equazioni

$$3x -5y -4 =0.$$
$$3y - x + 1 = 0$$

Sono esempi di equazioni di primo grado in due incognite, ovvero di un'equazione lineare in due incognite.

SI CHIAMA EQUAZIONE LINEARE un'equazione di PRIMO GRADO per tutte le incognite presenti.

La soluzione di ognuna di queste equazioni è una coppia di valori (x,y) che rende vera la relazione di uguaglianza.
Per esempio la coppia (0;-4/5) rende vera la prima mentre la coppia (0;-1/3) è una soluzione della seconda.
Verifichiamo quanto affermato: ci basta mettere i due valori nelle equazioni. Per la prima abbiamo:

$$3 \circ 0 – 5 \circ (-4/5) -4 = 0$$
$$0 + 4 – 4 = 0$$
$$0 = 0$$

Ed è quindi vera
Analogamente, per la seconda, mettendo 0 al posto della x e -1/3 al posto della y otteniamo:

$$3 \circ (-1/3) – 1 \circ 0 + 1 = 0$$
$$-1 -0 +1 = 0$$
$$0 = 0$$

Se vogliamo trovare altre soluzioni, ci basta assegnare valori a caso alla x e stabilire poi quanto vale la y.
Proviamo insieme con il valore x = 1.
Otteniamo :
$3 \circ 1 – 5 y -4 = 0 \Rightarrow 3 – 5y – 4 = 0 \Rightarrow -5y = 1 \Rightarrow y = -1/5 \Rightarrow$ la soluzione è la coppia (1;-1/5)
Per la seconda:
$3y -1 \circ 1 +1 = 0 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ la soluzione è la coppia (1;0)
Possiamo trovare altre soluzioni allo stesso modo, attribuendo diversi valori a x e ricavando i rispettivi valori di y.
Esistono INFINITE coppie (x; y) che soddisfano l'equazione. Si dice che

ogni equazione lineare in due incognite è indeterminata.

SISTEMA DI EQUAZIONI
Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni in cui compaiono le stesse incognite, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.
In pratica, se abbiamo due incognite, ci servono almeno due equazioni per risolvere il sistema.
Risolvere un sistema significa trovare le soluzioni che soddisfano contemporaneamente TUTTE LE EQUAZIONI che lo compongono.
In altre parole : per risolvere un sistema dobbiamo trovare i valori che rendono vere tutte le equazioni del sistema stesso.
Per indicare un sistema, si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse da una parentesi graffa

$$\begin{cases} 3x - 5y - 4 = 0 \\ 3y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Vedremo poi come risolverlo. Intanto vi dico che la soluzione è

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

GRADO DI UN SISTEMA

Il grado di un sistema di equazioni algebriche intere è il PRODOTTO dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

Ad esempio il sistema precedente è di PRIMO GRADO perché composto da equazioni di primo grado. Il prodotto è infatti: 1 ∘ 1 = 1

Un sistema di primo grado è detto sistema lineare.

Un sistema lineare è formato soltanto da equazioni di primo grado. Sono questi i sistemi di cui ci occuperemo.

SISTEMA LINEARE IN FORMA NORMALE.

Per risolvere un sistema lineare dobbiamo scriverlo in FORMA NORMALE, ovvero ricondurlo alla forma :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

- a, a_1 e b, b_1 indicano, rispettivamente, i coefficienti delle incognite x e y
- c e c_1 indicano i termini noti delle due equazioni.

Per riportare il sistema in forma normale ci basta trasformare le equazioni che lo compongono in altre equivalenti aventi cioè la stessa soluzione, applicando le regole viste per le equazioni.

Interpretazione grafica

Nel piano cartesiano, ogni equazione lineare in due incognite individua una retta. È quindi possibile dare un'interpretazione grafica anche dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite x e y.

Trovare la soluzione di un sistema lineare significa trovare il punto di incontro tra due rette.

Vediamo con un ESEMPIO.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

Applichiamo uno dei metodi che vedremo dopo per risolvere i sistemi, quello di SOSTITUZIONE e scriviamo al posto di y della seconda equazione il valore dato dalla prima. Otteniamo

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + 1 = -2x - 2 \end{cases}$$

Lasciamo invariata la prima equazione e risolviamo la seconda, contenente solo la x. Otteniamo:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x + 2x = -1 - 2 \end{cases}$$

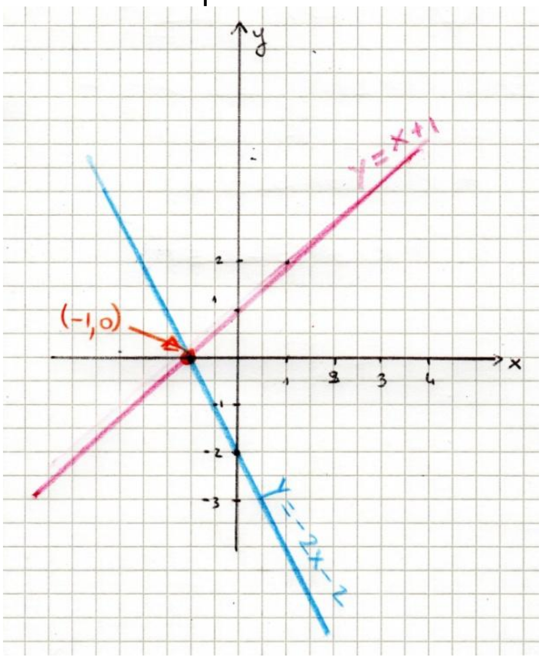
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x + 1 = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha quindi come soluzione

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Che rappresenta il punto di incontro tra le due rette y = x+1 e y=-2x-2. Rappresentiamo la situazione sul piano cartesiano



ESERCIZI

Per ogni equazione nelle incognite x e y verifica se le coppie di numeri scritte a lato sono soluzioni

- 2x +6y -5= 0 (0; 1) (1;1/2) (5/2;0)
- x-2y – 1 = 0 (1;1) (3;5) (2;3)
- 3x – 2y + 1 = 0 (7;11), (5;6)
- x - 4y + 8 = 0 (-1;2) (- 8; 4)

ESERCIZIO 2 Stabilisci se la coppia (3;2) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} + 1 = 0 \end{cases}$$

La coppia di numeri data è soluzione del sistema se SODDISFA CONTEMPORANEAMENTE entrambe le equazioni che compongono il sistema. Dobbiamo quindi sostituire i valori di x e y dati in entrambe le equazioni e verificare che siano entrambe vere.

Abbiamo

$$\begin{cases} 3 - 2 \circ 2 + 1 = 0 \ vera \\ 3 + 2 + 1 = 0 \text{ falsa} \end{cases}$$

La coppia (3;2) NON soddisfa la seconda equazione del sistema per cui NON e' soluzione del sistema proposto.

ESERCIZIO 3: Verifica se la coppia scritta di fianco a ogni sistema è soluzione del sistema oppure no.

- $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ (3; 1) [sì]
- $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ (-2; -1) [NO]
- $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ (1; 1/3) [si]
- $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ (-1; 1) [si]
- $\begin{cases} 5x - 2y + 7 = 0 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ (1; 1) [NO]
- $\begin{cases} 3x + 2y + 1 = 0 \\ 6x - 9y = 2 \end{cases}$ (5; -2) [NO]
- $\begin{cases} 3y = x + 2 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$ (1; 1) [si]

Il grado di un sistema

ESERCIZIO 1 : Fra i seguenti sistemi indica quelli di primo grado

$$A) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \quad B) \begin{cases} 7x - \frac{1}{3}y + 1 = y \\ 4xy - 2 = 0 \end{cases} \quad C) \begin{cases} 2y + 2 = 1 - x \\ 3x + y = 1 - 2y \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 : Scrivi il grado di ciascuno dei seguenti sistemi.

$$\begin{cases} x^4+y=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \quad \textbf{b.} \begin{cases} xy=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4+y^4=1 \\ x^3-y=1 \end{cases} \quad \textbf{c.} \begin{cases} x^3y=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3y+y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y+xy^2=1 \\ xy=4 \end{cases} \quad \textbf{b.} \begin{cases} x+xy=1 \\ x^2y-xy^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^3+y^2)^2=10 \\ x^4+y^2=x^2y^3 \end{cases} \quad \textbf{c.} \begin{cases} x^6+y^6=1 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2-y^3)^2=1 \\ (x^3y^2)^3=9 \end{cases}$$

La riduzione di un sistema lineare a forma normale

Ricorda : Dobbiamo scrivere le due equazioni nella forma ax +by = c, in cui compaiono le due incognite a primo membro e il termine noto a secondo membro.

ESERCIZIO : Riduci a forma normale i seguenti sistemi.

$$\begin{cases} 2x-3y-14=9-3x+2y \\ x+4y-10=14-6+3y-5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-3y)-8(x-y)=19 \\ 4(x-y)-2(3x-y)=14 \end{cases}$$