

EQUAZIONI IN BREVE

Si dice **IDENTITÀ** una uguaglianza fra due espressioni (di cui almeno una letterale) verificata per qualsiasi valore attribuito alle lettere in essa presenti.

Si dice **EQUAZIONE** una uguaglianza fra due espressioni (di cui almeno una letterale) che può essere verificata solo per particolari valori attribuiti alle lettere in essa presenti.

In altre parole :

Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche, contenenti variabili, che diventa vera per determinati valori attribuiti alle variabili stesse.

Se l'uguaglianza tra due espressioni algebriche, contenenti variabili, è sempre vera per qualsiasi valore attribuito alle variabili, si ha una **IDENTITÀ**.

Le equazioni possono essere ad una o più incognite; inoltre si dicono: di primo, secondo, terzo, ... grado ad una incognita quando l'incognita compare con grado massimo 1, 2, 3, '

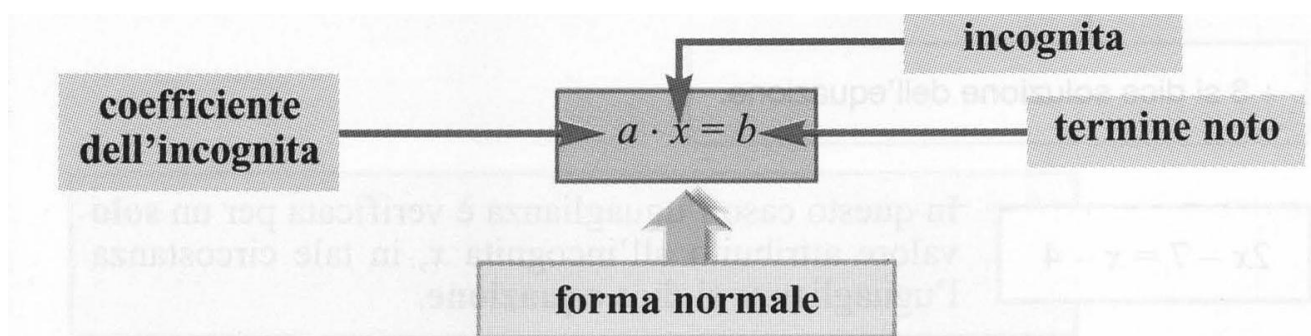
EQUAZIONI LINEARI

Un'equazione algebrica in una sola variabile x assume la forma

$$a(x) = b(x)$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono espressioni algebriche nella variabile x .

L'espressione a sinistra del simbolo uguale si dice *primo membro*, quella alla destra *secondo membro*.



La variabile x si dice anche **INCOGNITA** e i termini presenti nelle espressioni $a(x)$ e $b(x)$ che non contengono l'incognita sono i **TERMINI NOTI** dell'equazione.

I valori delle incognite che trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera sono le **SOLUZIONI** o **RADICI** dell'equazione.

Il loro valore va ricercato nell'insieme di definizione o dominio o campo di esistenza dell'equazione.

RICORDA: Il dominio è l'insieme dei valori che può assumere la x , tali che l'espressione algebrica presente nell'equazione non perda di significato. Per esempio se

$$a(x) = 1/x,$$

l'espressione è definita per i valori di x tali che $x \neq 0$, valore che annulla il denominatore della frazione.

COME RISOLVERE UN'EQUAZIONE

Risolvere un'equazione significa trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione, indicato di solito con S , che è un sottoinsieme del dominio.

Nella risoluzione di un'equazione a un'incognita si possono avere i seguenti casi:

- determinata: se l'insieme delle soluzioni è finito e non vuoto;
- indeterminata: se l'insieme delle soluzioni è infinito;
- impossibile: se l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto.

Una equazione di primo grado si dice scritta in **FORMA NORMALE** quando si presenta nella forma:

$$a \cdot x = b \text{ con } a, b \in R \text{ e } a \neq 0$$

Due o più equazioni di primo grado si dicono **EQUIVALENTI** quando hanno la stessa soluzione

EQUAZIONI EQUIVALENTI E PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Due equazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Perché due equazioni siano equivalenti è necessario che tutte le soluzioni della prima equazione verifichino anche la seconda e viceversa.

Per risolvere un'equazione è opportuno trasformarla, applicando le regole del calcolo letterale, in una più semplice ad essa equivalente.

Le possibili trasformazioni sono regolate dai **principi di equivalenza**.

PRIMO PRINCIPIO

Addizionando a entrambi i membri lo stesso numero o la stessa espressione algebrica, con lo stesso dominio dell'equazione, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

SECONDO PRINCIPIO.

Moltiplicando entrambi i membri di un'equazione per lo stesso numero, diverso da zero, o la stessa espressione algebrica con lo stesso dominio dell'equazione, e tale che non si annulli in quel dominio, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

I principi di equivalenza ci consentono di svolgere alcune semplici operazioni, che ci permettono di ricondurre qualsiasi equazione in forma normale e quindi di cercarne le soluzioni (regole pratiche)

In particolare ci permettono di

- portare un termine da un membro all'altro cambiando il segno. In questo modo possiamo trasportare tutti i termini ad un unico membro, ponendo l'altro uguale a zero;
- eliminare due termini UGUALI che si trovano uno al primo e uno al secondo membro;
- eliminare due termini OPPOSTI presenti nello stesso membro;
- moltiplicare o dividere tutti i termini per un medesimo fattore non nullo;

Inoltre, se i coefficienti numerici sono frazionari, grazie ai principi di equivalenza possiamo **MOLTIPLICARE TUTTI I TERMINI PER IL MINIMO COMUNE MULTIPLO (M.C.M.) DEI LORO DENOMINATORI.**

EQUAZIONI LINEARI

Come dicevamo poco sopra,

Un'equazione in **forma normale** si presenta nella forma $a(x) = 0$,

dove $a(x)$ è un polinomio.

Il **grado** di un'equazione scritta in forma normale, è il grado del polinomio $a(x)$.

L'**equazione lineare** in un'incognita (o **equazione di primo grado**) è l'equazione che può essere ridotta nella forma:

$$ax + b = 0$$

dove x è l'incognita, a e b sono numeri reali.

In base ai valori che assumono i coefficienti a e b si possono presentare tre casi.

1. $a \neq 0$: Possiamo dividere entrambi i membri per a : $x = -b/a \Leftrightarrow$ L'equazione è **determinata** e la soluzione è

$$x = -b/a$$

2. $a = 0$ e $b \neq 0$: L'equazione diventa:

$$0 \cdot x = -b$$

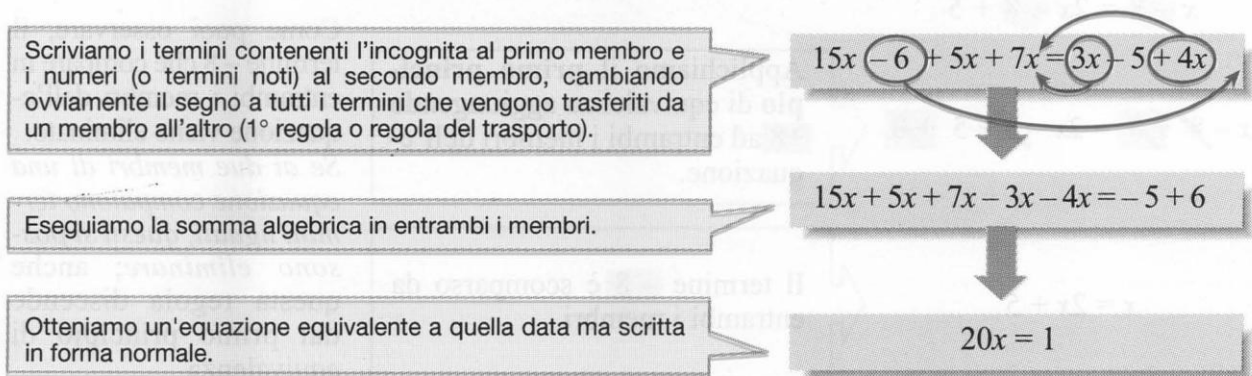
\Leftrightarrow L'equazione è **impossibile**, poiché l'insieme delle soluzioni è vuoto.

3. $a = 0$ e $b = 0$: L'equazione diventa:

$$0 \cdot x = 0$$

\Leftrightarrow L'equazione è **indeterminata**, poiché ammette come soluzione qualsiasi numero reale

RIDURRE UN'EQUAZIONE LINEARE IN FORMA NORMALE



EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Un'equazione di **secondo grado** o **quadratica** in un'incognita ha forma normale:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove a, b, c sono numeri reali e $a \neq 0$.

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dove $b^2 - 4ac = \Delta$ è detto **determinante**.

A seconda del valore che assume il determinante si possono avere tre casi. L'equazione è:

- **determinata** se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: ammette due soluzioni reali e distinte;
- **indeterminata** se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ammette due soluzioni reali coincidenti;
- **impossibile** se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ non ammette alcuna soluzione reale.

RELAZIONI TRA COEFFICIENTI E RADICI.

Fra i coefficienti di un'equazione di secondo grado in forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e le sue soluzioni x_1 e x_2 esistono le seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Le equazioni di grado superiore al secondo sono equazioni che presentano polinomi con l'incognita di grado maggiore di 2.

LE EQUAZIONI AMMETTONO UN NUMERO DI SOLUZIONI UGUALI AL LORO GRADO

Questo significa che le equazioni di grado superiore al secondo hanno un numero di soluzioni maggiore di 2.

Non è detto che tutte le radici siano reali e distinte, possono essere coincidenti o non reali (complesse).

Non esiste una procedura univoca o una formula per risolvere questo tipo di equazioni.

Poiché sappiamo risolvere solo equazioni di secondo grado, per trovare le soluzioni di queste equazioni è necessario riscrivere i polinomi di grado n , come prodotti di polinomi di primo e secondo grado.

Applicando la legge di annullamento del prodotto, si pone ciascun binomio o trinomio della scomposizione e si determinano le radici.

OVVIAMENTE NON SEMPRE È POSSIBILE SCOMPORRE I POLINOMI DATI

EQUAZIONI FRAZIONARIE

In un'**equazione frazionaria** (o **fratta**) l'incognita si trova anche al denominatore.

Nel risolvere equazioni di questo tipo è necessario escludere dal dominio dell'equazione quei valori che annullano il denominatore, rendendo priva di significato l'equazione stessa

Ad esempio l'equazione nell'incognita reale x :

$$\frac{x^2 - 3x}{3 - x} - 2 = 0$$

ha un senso solo imponendo le **condizioni di esistenza** (C.E.) della frazione, ossia ponendo il denominatore $\neq 0$:

$$3 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 3.$$

Fatto questo, possiamo risolvere l'equazione moltiplicando i termini per il m.c.m. $(3 - x)$:

$$\frac{x^2 - 3x - 2(3 - x)}{3 - x} = 0$$

Semplifichiamo il denominatore e svolgiamo i calcoli:

$$x^2 - 3x - 6 + 2x = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La soluzione $x_2 = 3$ NON è accettabile, per cui l'equazione ha come unica soluzione $x = -2$

EQUAZIONI LETTERALI

Le equazioni **letterali** sono equazioni in cui compaiono più lettere di cui una viene scelta come incognita, mentre le altre rappresentano i coefficienti letterali, detti **parametri**, che sono valori reali costanti.

Le soluzioni dell'equazione dipendono dal valore che assumono i coefficienti letterali dell'incognita. La risoluzione prende il nome di **discussione** in quanto è necessario discutere i valori che assumono i parametri per determinare l'insieme delle soluzioni.

Esempio

Stabilire per quale valore di k è determinata l'equazione

$$kx + 6 = k + 2x + 6$$

Applicando i principi di equivalenza si trova l'equazione equivalente:

$$kx - 2x = k \quad \rightarrow \quad x(k - 2) = k$$

da cui si ricava

$$x = \frac{k}{k - 2}$$

Perché la frazione abbia significato deve avere il denominatore diverso da zero, quindi anche in questo caso occorre determinare le condizioni di esistenza (in questo caso riferite al parametro e non alla variabile dell'equazione):

$$k - 2 \neq 0 \rightarrow k \neq 2.$$

Per tutti gli altri valori di k l'equazione è determinata.

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Un'equazione è **esponenziale** quando l'incognita è presente soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice è del tipo

$$a^x = b \text{ con } a > 0$$

Poiché per $a > 0$, si ha sempre che $a^x > 0$ e si possono isolare i seguenti casi:

- L'equazione è **impossibile**:
 - per $b \leq 0$, perché come già detto a^x è sempre > 0 per $a > 0$;
 - per $a = 1$ e $b \neq 1$, perché 1^x è sempre uguale a 1 per qualsiasi valore di x .
- L'equazione è **indeterminata**:
 - per $a = 1$ e $b = 1$, perché l'espressione $1^x = 1$ è un'identità.
- L'equazione è **determinata**:
 - per $a \neq 1$ e $b > 0$; in questo caso l'equazione ha una e una sola soluzione, data da $x = \log_a(b)$.

È possibile determinare la soluzione di un'equazione esponenziale, se esiste,

se è possibile riscrivere l'equazione

$$a^x = b,$$

in modo che in entrambi i membri compaia una potenza della stessa base, infatti due potenze sono uguali se sono uguali i loro esponenti:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

Un'equazione di questo tipo si risolve ponendo

$$f(x) = g(x)$$

Quando non è possibile uguagliare le basi, le equazioni si risolvono ricorrendo ai logaritmi

ESEMPIO 1

Risolvere l'equazione

$$8^{2x-3} = 1/4$$

Per riscrivere le espressioni con la stessa base si può osservare che 8 e 4 sono entrambe potenze di 2:

LEZIONI IGNORANTI

$$8 = 2^3$$

$$1/4 = 2^{-2}.$$

Riscrivendo l'equazione si ottiene:

$2^{3(2x-3)} = 2^{-2} \rightarrow$ Le due espressioni sono uguali se lo sono gli esponenti:

$$3(2x-3) = -2 \quad \rightarrow 6x = 9 - 2 \quad \rightarrow x = 7/6.$$

ESEMPIO 2

Risolvere l'equazione

$$(x+2)^{x-2} = 1$$

Per trovare la soluzione di questa equazione si ricorre alle proprietà delle potenze:

$a^x = 1$ se $x = 0$ oppure se $a = 1$.

Ponendo l'esponente uguale a zero si ricava

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2.$$

Ponendo la base uguale a 1 si ricava

$$x + 2 = 1 \rightarrow x = -1.$$

ESEMPIO 3

Si consideri la seguente equazione per i valori reali della variabile x :

$$8^{x-\frac{1}{3}} = 4^{\frac{3x-1}{2}}$$

Riscriviamo l'equazione uguagliando le basi in entrambi i membri:

$$2^{3(x-\frac{1}{3})} = 2^{2(\frac{3x-1}{2})}$$

Uguagliando gli esponenti otteniamo:

$$3x - 1 = 3x + 1 \rightarrow -1 = 1$$

IMPOSSIBILE!

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione **logaritmica** è un'equazione in cui l'incognita compare nell'argomento di uno o più logaritmi. Prima di determinare le soluzioni dell'equazione logaritmica è necessario definire le condizioni di esistenza per ogni argomento del logaritmo, che deve essere sempre maggiore di zero.

LEZIONI IGNORANTI

Successivamente, utilizzando le proprietà dei logaritmi si riconduce l'equazione alla forma:

$$\log A(x) = \log B(x)$$

Poiché due logaritmi nella stessa base sono uguali se è uguale il loro argomento, si deduce che

$$\log A(x) = \log B(x) \rightarrow A(x) = B(x)$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione sono le soluzioni dell'equazione
logaritmica.

ESEMPIO 1

Risolvi l'equazione logaritmica

$$\ln(x-9) + \ln(x) = \ln(10)$$

Determiniamo, in primo luogo, le condizioni di esistenza degli argomenti dei logaritmi in cui è presente l'incognita.

$$x > 0 \text{ e } x-9 > 0 \rightarrow x > 9, \text{ per cui C.E.: } x > 9.$$

Riconduciamo l'espressione a primo membro alla forma $\ln A(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi, per cui la somma dei logaritmi dei due numeri è uguale al logaritmo del prodotto di due numeri:

$$\ln(x-9) + \ln(x) = \ln[(x-9) \cdot x]$$

$$\ln[x(x-9)] = \ln 10$$

Poiché i logaritmi hanno la stessa base possiamo uguagliare gli argomenti:

$$x^2 - 9x = 10 \rightarrow x^2 - 9x - 10 = 0.$$

L'equazione di secondo grado ammette due soluzioni:

$$x_1 = (9 + 11)/2 = 10; x_2 = (9 - 11)/2 = -1.$$

La soluzione negativa non soddisfa le condizioni di esistenza, per cui l'equazione ha un sola soluzione $x = 10$.

L'equazione logaritmica si può presentare anche nella forma:

$$\log_a A(x) = k$$

Un'equazione di questo tipo nella forma più semplice è

$$\log_a x = k$$

la cui soluzione è immediata perché è sufficiente applicare la definizione di

LEZIONI IGNORANTI

logaritmo. Se infatti la soluzione esiste, questa è $x = a^k$.

ESEMPIO 2

Risolvi l'espressione $\log_2 2x = -5$

Determiniamo le condizioni di esistenza

$$2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

Per ottenere l'espressione del primo membro nella forma $\log_a x$, utilizziamo la proprietà per cui il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli numeri:

$$\log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x$$

per cui

$$\log_2 2 + \log_2 x = -5$$

Ricordando che

$$\log_a a = 1$$

abbiamo

$$1 + \log_2 x = -5 \rightarrow \log_2 x = -6$$

Da cui si ricava:

$$x = 2^{-6} = 1/64.$$

EQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLVIBILI CON I LOGARITMI

In alcuni casi le equazioni esponenziali possono essere risolte utilizzando i logaritmi. In questo caso si utilizzano le espressioni dei membri dell'equazione come se fossero gli argomenti di due logaritmi nella stessa base. L'equazione si risolve uguagliando fra loro i logaritmi. Questa operazione è detta "passaggio ai logaritmi". La scelta della base dei logaritmi è arbitraria, ma per comodità di calcolo è preferibile sceglierli a base naturale o decimale.

ESEMPIO

Risolvi l'equazione

$$e^{\ln x^2} = 4$$

Determiniamo la condizione di esistenza relativa al logaritmo:

$$\ln x^2 = 2 \ln x, \text{ per cui C.E.: } x > 0$$

Consideriamo i due membri dell'equazione come gli argomenti di due logaritmi in base naturale

$$\ln(e^{\ln x^2}) = \ln 4$$

Per la proprietà relativa alla potenza dell'argomento dei logaritmi si ottiene:

$$\ln x^2 \cdot \ln e = \ln 4$$

Poiché $\ln e = 1$, si ha: $\ln x^2 = \ln 4$.

Uguagliando gli argomenti si ha:

$$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = -2.$$

Poiché $x > 0$, la soluzione $x_2 = -2$ non è accettabile

L'unica soluzione è quindi $x = 2$

PROBLEMI RISOLUBILI CON UN'EQUAZIONE

Alcuni comuni problemi possono essere risolti ricorrendo alle equazioni. Il testo del problema, espresso in linguaggio naturale, deve essere tradotto in un'equazione utilizzando il linguaggio simbolico della matematica. La soluzione dell'equazione trovata, detta **equazione risolvente**, se esiste, è la soluzione del problema.

È quindi importante familiarizzare con il meccanismo di traduzione dal linguaggio naturale in cui i problemi vengono espressi al linguaggio matematico formale, e viceversa.