PRODOTTI NOTEVOLI

Continuiamo a parlare di calcolo letterale ancora per oggi. Poi torneremo un pochino indietro e parleremo di insiemi numerici.

Come visto in precedenza, il prodotto fra due polinomi si calcola moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per ciascun termine dell'altro e sommando poi i monomi simili.

A volte, per fortuna, i polinomi da moltiplicare presentano delle caratteristiche per le quali dopo aver eseguito la moltiplicazione ed aver ridotto i termini simili, si ottiene un'espressione algebrica in cui lo schema di calcolo rimane invariato. In pratica, esistono delle regole che rendono il calcolo più semplice.

Queste moltiplicazioni prendono il nome di **prodotti notevoli**.

Vi elenco quali sono e poi li vediamo in dettaglio

- **prodotto della somma di due monomi per la loro differenza**
- quadrato di un binomio
- quadrato di un polinomio
- cubo di un binomio
- Potenza n-esima di un binomio (triangolo di Tartaglia)

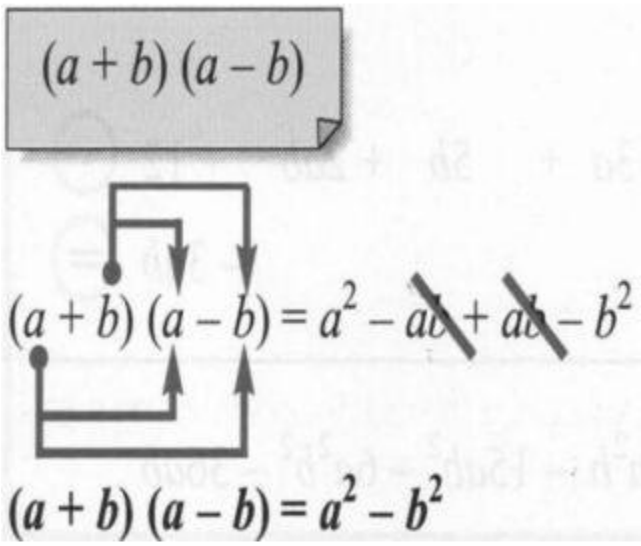
Esaminiamo ciascuna regola più da vicino

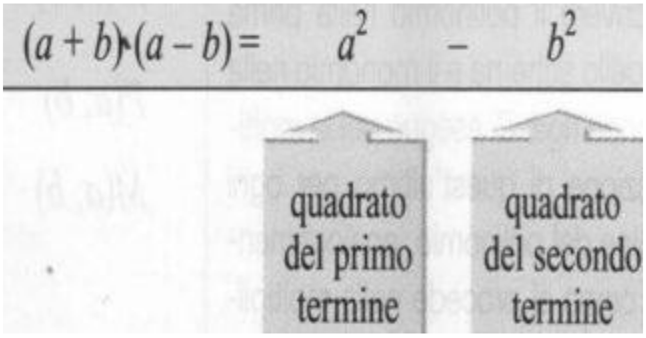
PRODOTTI NOTEVOLI 1: **Prodotto della somma di due monomi per la loro differenza**

Il prodotto di due binomi $(a - b)(a + b)$ è uguale alla differenza fra il quadrato di a e il quadrato di b:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Infatti :



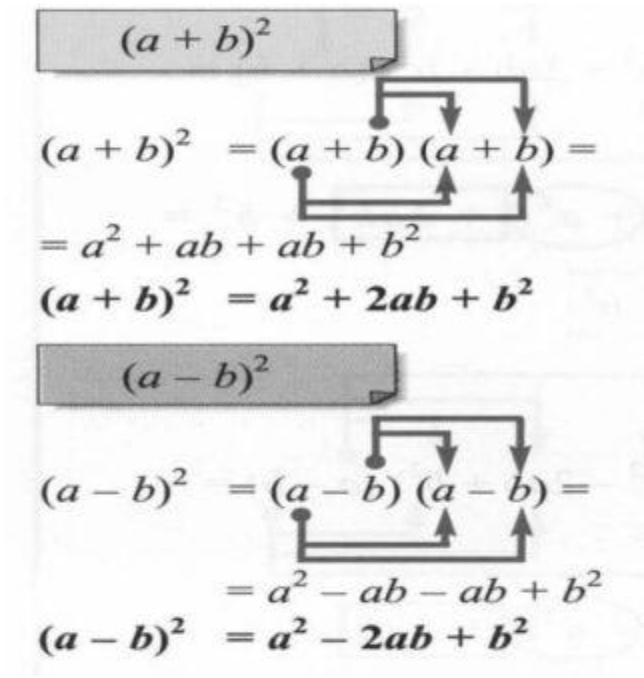


PRODOTTI NOTEVOLI 2 : QUADRATO DI UN BINOMIO

Il quadrato di un binomio ($a \pm b$) è un trinomio formato dal quadrato di a, più (o meno) il doppio prodotto di a e b, più il quadrato di b.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



Per la definizione di potenza risulta infatti :

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) =$

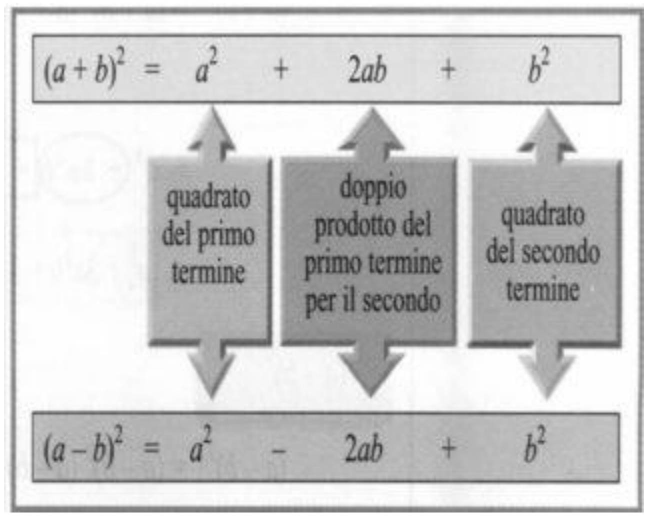
Eseguendo la moltiplicazione tra i due binomi abbiamo :

$= a^2 + ab + ab + b^2$

Riducendo i termini simili, otteniamo infine :

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Ovvero:



Esempio

Calcoliamo $(4a - 3b)^2$:

Scriviamo per esteso tutti i termini del prodotto notevole:

- quadrato del primo termine: $(4a)^2 = 16a^2$
- doppio prodotto del primo per il secondo: $2(4a)(-3b) = -24ab$
- quadrato del secondo termine: $(-3b)^2 = 9b^2$

Ovvero risulta:

$(4a - 3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2$

PRODOTTI NOTEVOLI 3 : QUADRATO DI UN POLINOMIO

In generale, **il quadrato di un polinomio è uguale alla somma dei quadrati dei monomi che lo compongono e dei doppi prodotti di ogni termine per ciascuno dei successivi**.

Ad esempio, nel caso di un quadrinomio abbiamo:

$(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2xz+2xt+2yz+2yt+2zt$

Il caso più frequente è quello del quadrato di un trinomio, di cui vediamo la regola specifica

CASO PARTICOLARE : Quadrato di un trinomio

Il quadrato di un trinomio $(a + b + c)$ è un polinomio formato dalla somma dei quadrati di a, b, c, più il doppio prodotto di ciascun termine per gli altri due.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Per la definizione di potenza risulta infatti :

$(a + b + c)^2 = (a + b+c)(a + b+c) =$

Eseguendo la moltiplicazione tra i due trinomi, abbiamo :

$= a^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + b^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc} + c^2 =$

Riducendo i termini simili, otteniamo infine :

$$a^2 + b^2 + c^2 + \mathbf{2ac} + \mathbf{2bc} + \mathbf{2ab}$$

Esempio

Calcola lo sviluppo di $(2x - 3xy + 2y)^2$:

Applichiamo la formula del quadrato di un trinomio ai monomi $a = 2x$, $b =-3xy$, $c = 2y$:

$(2x)^2 + (-3xy)^2 + (2y)^2 + 2(2x)(-3xy) + 2(2x)(2y) + 2(-3xy)(2y) = 4x^2 + 9x^2y^2 + 4y^2 - 12x^2y + 8xy - 12xy^2$.

PRODOTTI NOTEVOLI 4 : IL CUBO DI UN BINOMIO

Il cubo di un binomio $(a + b)$ è un quadrinomio formato dal cubo di a, più il triplo prodotto di a al quadrato per b, più il triplo prodotto di b al quadrato per a, più il cubo di b.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

In generale, **il cubo di un binomio è uguale alla somma tra**

- **cubo del primo monomio,**
- **triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo**
- **triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo**
- **cubo del secondo monomio**

Infatti, applicando le proprietà delle potenze, possiamo scrivere :

$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) =$

applicando la regola dello sviluppo del quadrato, abbiamo

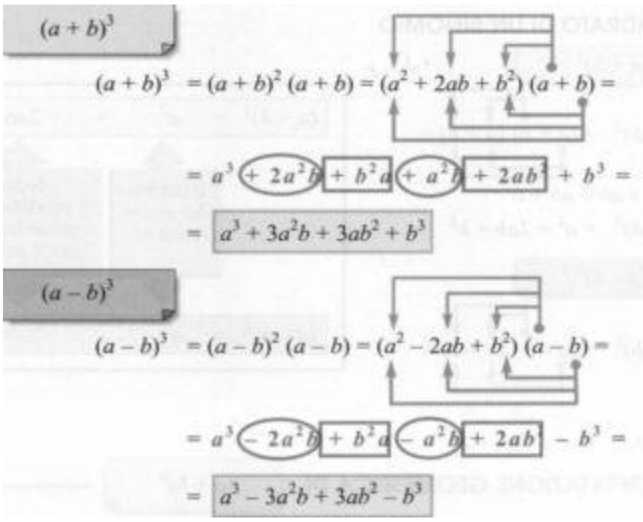
$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

Eseguendo ora la moltiplicazione tra il trinomio e il binomio otteniamo:

$a^3 + \mathbf{a^2b} + \mathbf{2a^2b} + \mathbf{2ab^2} + \mathbf{ab^2} + b^3 =$

Riducendo i termini simili, abbiamo infine :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Esempio

Calcolare lo sviluppo di $(3a - 2b)^3$:

Applichiamo la formula del cubo di un binomio ai monomi

a: $3a$;

b: $-2b$

Otteniamo :

$(3a)^3 + 3(3a)^2(–2b) + 3(3a)\ (–2b)^2 + (–2b)^3 \rightarrow 27a^3 + 3(9a^2)(–2b) + 3(3a)(4b^2) – 8b^3 \rightarrow 27a^3 – 54a^2b + 36ab^2 – 8b^3$.

In conclusione :

$$(3a – 2b)^3 = 27a^3 – 54a^2b + 36ab^2 – 8b^3.$$

PRODOTTI NOTEVOLI 5 : LA POTENZA ENNESIMA DI UN BINOMIO (triangolo di Tartaglia)

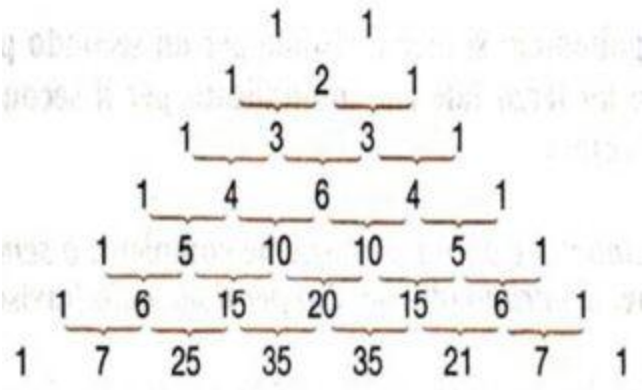
Vogliamo calcolare $(a+b)^n$, con $n\in\mathbb{N}$.

Osserviamo le potenze ottenute finora:

riga 0	$(a+b)^0=1$
riga 1	$(a+b)^1=a+b$
riga 2	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
riga 3	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Si può notare che:

- lo sviluppo di ciascuna potenza dà origine a un polinomio omogeneo dello stesso grado dell'esponente, completo e ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b
- il primo coefficiente è sempre uguale a 1
- i coefficienti di ciascuna riga si ottengono utilizzando una disposizione a triangolo, detto triangolo di Tartaglia. In questo triangolo, i numeri di ciascuna riga, tranne il primo e l'ultimo che sono sempre uguali a 1, sono la somma dei due sovrastanti della riga precedente.



Ad esempio :

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

Siccome i coefficienti estremi e quelli equidistanti dagli estremi sono uguali, in pratica basta calcolare metà dei coefficienti.

OSSERVAZIONE : Siccome

$$a—b=a+(—b)$$

è ovvio che lo sviluppo di $(a—b)^n$ si ottiene da quello di $(a+b)^n$, sostituendo a b il suo opposto —b. Di conseguenza, i termini i quali contengono **b con esponente pari** restano inalterati, mentre quelli contenenti **b con esponente dispari** cambiano semplicemente di segno: ne segue che nello sviluppo di $(a—b)^n$ i termini si succedono alternativamente col segno + e il segno —.

POTENZA ENNESIMA DI UN BINOMIO : la regola

Lo sviluppo di $(a+ b)^n$, con n intero e positivo, è un polinomio omogeneo di grado n, ordinato secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b; il coefficiente del primo termine è 1, il coefficiente del secondo termine è l'esponente n; ogni altro coefficiente si ottiene moltiplicando il coefficiente del termine precedente per l'esponente che ha a in questo termine e dividendo il prodotto ottenuto per l'esponente che ha b, nello stesso termine, aumentato di 1.

Esempio:

Applicando la regola precedente e calcolando i coefficienti con il triangolo di Tartaglia, eseguiamo il seguente sviluppo:

$(a+3b)^5$= I coefficienti da utilizzare sono 1, 5, 10 , 10, 5, 1 per cui abbiamo

$=a^5+5a^5 (3b) + 10 a^4(3b)^2 + 10 a^3(3b)^3 + 5 a^2(3b)^4+ (3b)^5$

Svolgiamo le potenze

$$a^5+15a^5 b + 10 a^4 \circ 9b^2 + 10 a^3\circ 27b^3 + 5 a^2 81b^4+ 243b^5$$

Infine eseguiamo le moltiplicazioni indicate:

$$a^5+15a^5 b + 90 a^4 b^2 + 270 a^3b^3 + 405 a^2b^4+ 243b^5$$

CURIOSITA':

Il triangolo di Tartaglia deve il suo nome al matematico italiano **Niccolò Fontana**, detto Tartaglia, noto anche per aver "scoperto" la formula risolutiva delle equazioni cubiche

Non so se nei prossimi giorni riuscirò a postarvi qualcosa, visto che la Pasqua incombe ed io non sono come al solito in gran forma. Vorrei però dedicarmi per qualche giorno ad altri argomenti, diversi dalla Matematica! Vedremo…