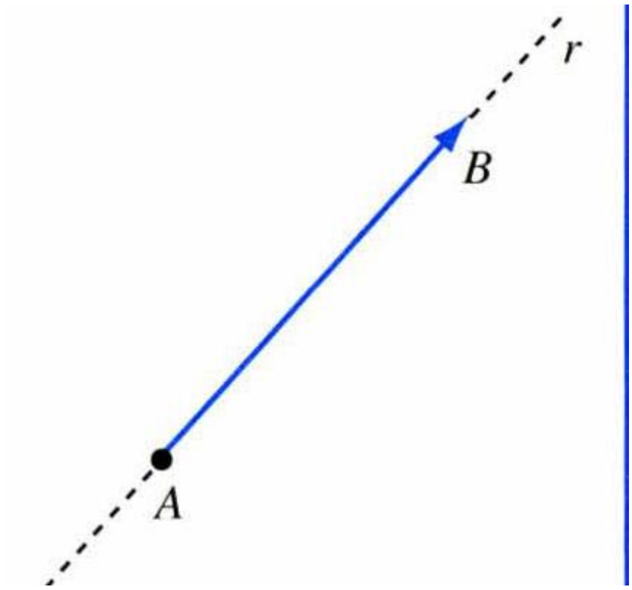
Come vedremo meglio in seguito:

In geometria un vettore è un segmento di retta orientato ossia un segmento in cui gli estremi sono considerati in un certo ordine. Il segmento avente come primo estremo A e secondo estremo B è detto orientato da A a B e viene indicato geometricamente con un segmento avente la punta della freccia nel secondo estremo.

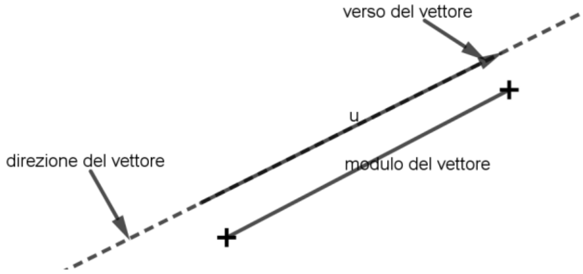


In Fisica per vettore si intende un ente matematico definito da un modulo, una direzione e un verso.

- Il **modulo** e un numero e ci da informazioni sull'entità della grandezza fisica (il numero di metri dello spostamento);

- la **direzione** e la retta lungo la quale essa e diretta (la direzione dello spostamento);

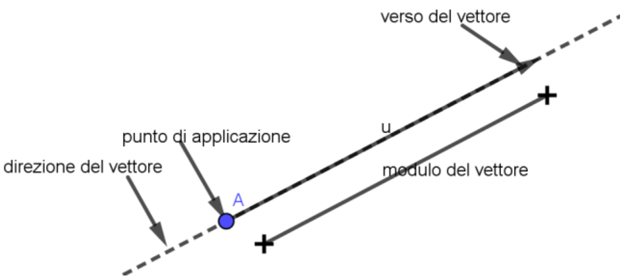
- il **verso** ci dice l'orientazione lungo tale retta (avanti o indietro).



Il simbolo grafico con cui si indica un vettore è una lettera minuscola con una piccola freccia disegnata sopra: per esempio $\vec{v}$. Il modulo del vettore si può indicare con il simbolo v senza la freccia sopra, o con la rappresentazione $|\vec{v}|$ («modulo di $\vec{v}$»).

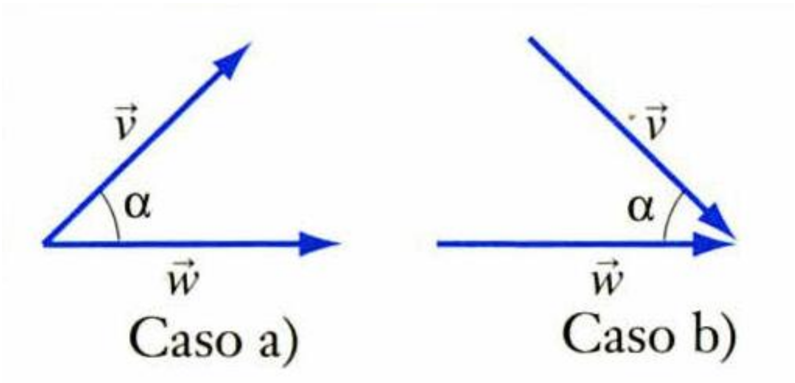
In base alla definizione data sopra, il vettore non corrisponde a un'unica freccia: infatti una giacitura (la direzione del vettore) individua un'infinita di rette con la stessa inclinazione sulle quali si staccano infiniti segmenti e quindi infinite frecce.

Nulla ci autorizza a sceglierne una in particolare, a meno che non ci sia un'informazione aggiuntiva, cioè il suo punto di partenza, detto **punto di applicazione**. Una volta specificato il punto di applicazione, resta individuata un’unica freccia e il vettore corrispondente è detto **vettore applicato**

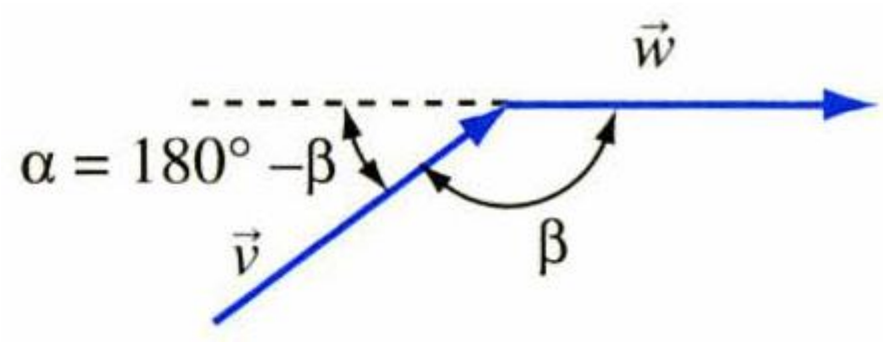


Prima di parlare delle operazioni tra vettori, definiamo l’angolo tra due vettori

Se due vettori hanno in comune il primo estremo (caso a) o il secondo (caso b), l’angolo α tra di essi è il minore dei due angoli di cui nel piano definito dai due vettori dovrebbe ruotare uno dei due per assumere direzione e verso dell'altro.



Se i vettori sono disposti in modo tale che l'origine di uno coincida con l'estremo dell'altro, o viceversa, allora α è il supplementare dell'angolo β formato dai due vettori

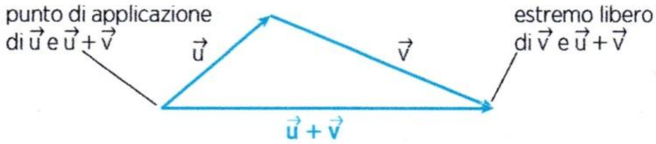


Come i numeri si combinano tra loro mediante le quattro operazioni, addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, anche i vettori possono combinarsi tra loro in vari modi. Vediamone alcuni.

SOMMA TRA VETTORI

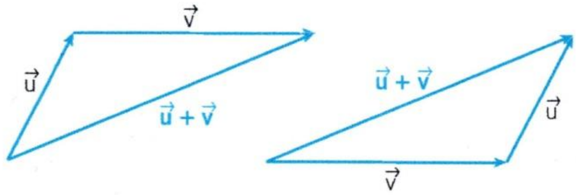
Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, la loro somma $\vec{u} + \vec{v}$ è un terzo vettore il cui punto di applicazione coincide con quello del primo vettore e il cui estremo libero coincide con l’estremo libero del secondo vettore, applicato all’estremo libero del primo.

La regola è complicata, ma la costruzione è molto semplice:



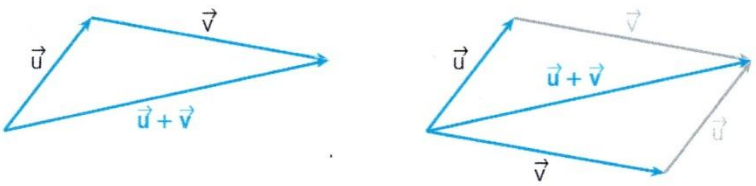
La somma tra vettori così definita gode della proprietà commutativa, infatti è facile verificare che risulta:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$



Questo modo di visualizzare la somma tra vettori è detto anche **metodo punta-coda**, perché essi vengono posizionati uno dopo l'altro. Consente di sommare tra loro un numero qualsiasi di vettori in modo molto semplice ed è particolarmente utile quando si ha a che fare con gli spostamenti.
Esiste un altro modo di visualizzare la somma tra vettori, detto **regola del parallelogramma**: consiste nell'applicare i due vettori nello stesso punto e poi costruire su essi un parallelogramma.

Il vettore somma è applicato allo stesso punto di applicazione dei due vettori e ha come lunghezza la diagonale del parallelogramma.



Qualunque delle due strategie si applichi il risultato è equivalente e si può scegliere di usare l'una o l'altra a seconda del contesto.

Nel caso degli spostamenti è naturale usare il metodo punta-coda, ma come vedremo ci sono casi in cui si ragiona meglio con il parallelogramma

DIFFERENZA TRA VETTORI

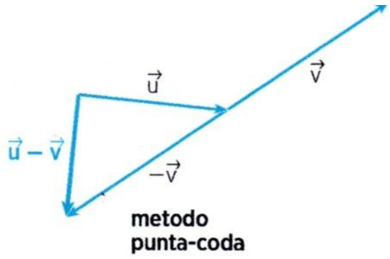
Il segno meno negli spostamenti unidimensionali è associato a un moto all'indietro, e sommando tra loro due spostamenti opposti si ottiene uno spostamento nullo. Ragionando in astratto, sommando due vettori opposti si ottiene il vettore nullo:

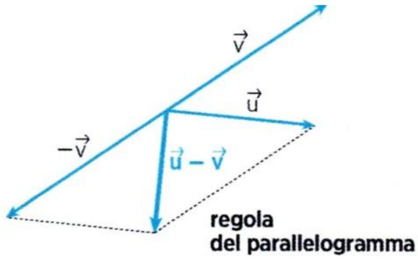
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = 0 \text{ (vettore nullo)}$$

In generale la differenza tra due vettori si ottiene sommando al primo l'opposto del secondo:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

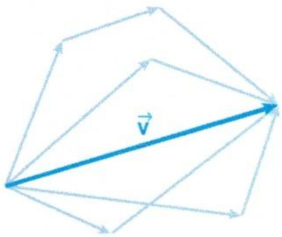
Il vettore opposto $-\vec{v}$ si disegna semplicemente invertendo la freccia: il punto di applicazione di $\vec{v}$ diventa l'estremo libero di $-\vec{v}$ e viceversa





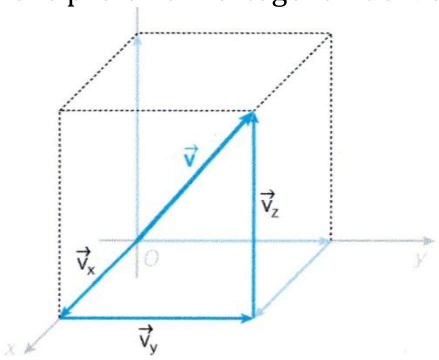
SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE

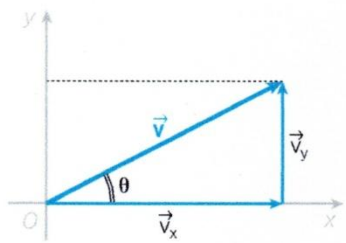
Ogni vettore $\vec{v}$ può essere pensato come se fosse il risultato di una somma tra due o più vettori, che si definiscono **componenti**.
Con la rappresentazione del metodo punta-coda questo equivale, sul piano, a fare un disegno come quello in figura.



Come puoi vedere dalla figura, esistono INFINITI modi di ottenere un vettore somma di altri due o più vettori, così come possiamo raggiungere una posizione nello spazio eseguendo infiniti spostamenti diversi

Un caso particolare, molto usato in fisica, è la scomposizione di un vettore lungo due direzioni perpendicolari tra loro: in questo caso, se utilizziamo la rappresentazione del parallelogramma, le componenti sono le proiezioni ortogonali del vettore lungo le direzioni scelte.

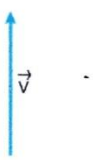


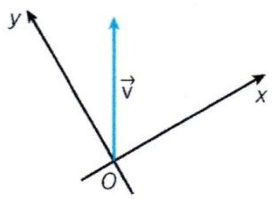


Scomponiamo sul piano il vettore $\vec{v}$ in due vettori perpendicolari $\overrightarrow{v_x}$ e $\overrightarrow{v_y}$. Il modulo di $\overrightarrow{v_x}$ e quello di $\overrightarrow{v_y}$, cioè la lunghezza delle frecce corrispondenti, si trovano con le regole della trigonometria:

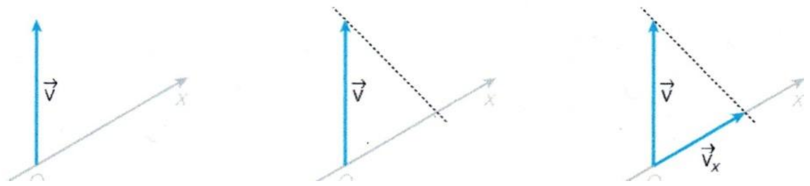
$$|\overrightarrow{v_x}| = \mathrm{v} \circ \cos\theta$$
$$|\overrightarrow{v_y}| = \mathrm{v} \circ \sin\theta$$

ESEMPIO :
Trova il vettore che scompone il vettore $\vec{v}$ lungo la direzione individuata da uno dei due assi ortogonali del disegno



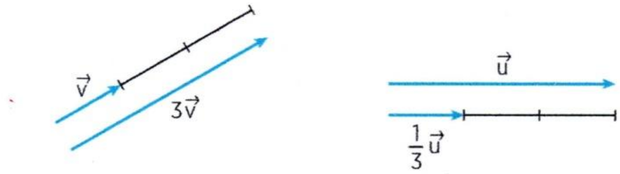


Per proiettare un vettore lungo una direzione si disegna prima la retta ad essa parallela e passante per il suo punto di applicazione; poi si traccia la perpendicolare a tale retta passante per l'estremo libero del vettore.



PRODOTTO E DIVISIONE PER UN NUMERO

Possiamo moltiplicare o dividere un vettore per un numero semplicemente moltiplicando o dividendo il suo modulo per quel numero; se il numero è negativo il verso del vettore cambia.

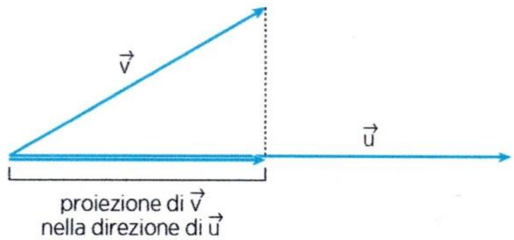


PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare

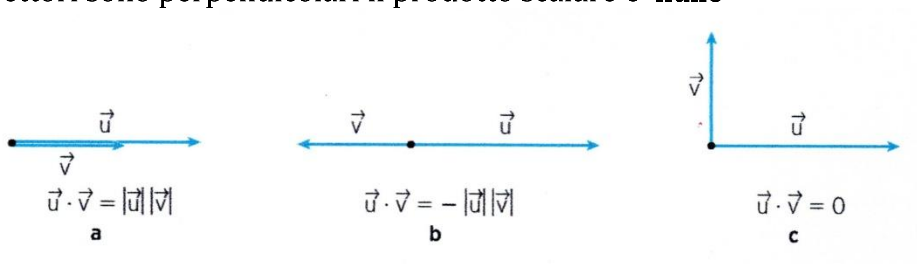
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

tra due vettori è un numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo vettore per la proiezione del secondo sul primo.



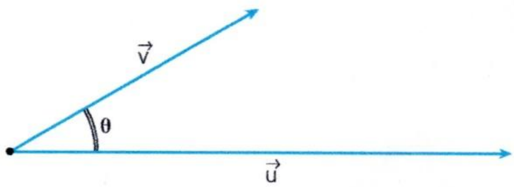
Il prodotto scalare trasforma due vettori in un numero e ci dà la misura di quanto essi siano ≪concordi≫:

- se i vettori sono paralleli e di verso concorde il prodotto scalare è **massimo** ed è uguale al prodotto tra i moduli dei due vettori;
- se i due vettori sono paralleli e di verso opposto il prodotto scalare è **minimo** e corrisponde al valore del caso precedente con il segno meno;
- se i due vettori sono perpendicolari il prodotto scalare è **nullo**



Le situazioni intermedie si ottengono con le regole della trigonometria, che danno la formula generale del prodotto scalare:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}| \, |\vec{v}| \cos \theta \quad = |$$

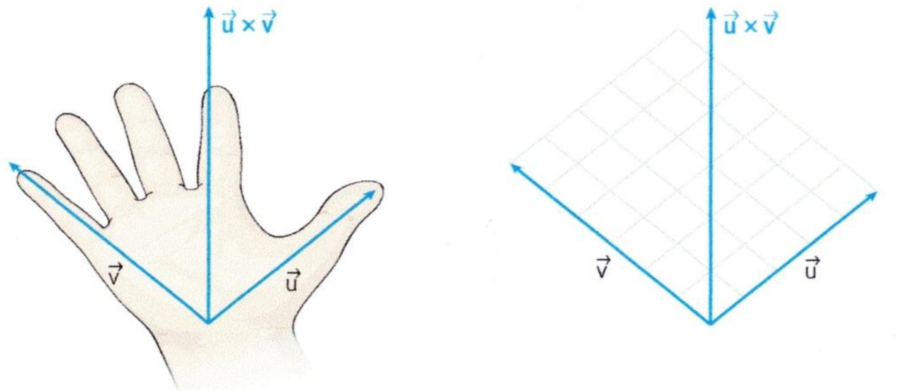


PRODOTTO VETTORIALE
Un'altra operazione che si può fare con due vettori è il cosiddetto prodotto vettoriale, che restituisce come risultato un vettore perpendicolare al piano individuato dai due vettori.

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, si definisce prodotto vettoriale

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

il vettore ad essi perpendicolare, il cui modulo è dato dall'area del parallelogramma costruito su $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e il cui verso è dato dalla regola della mano destra



Regola della mano destra: se il primo vettore è parallelo all'asse del pollice e il secondo a quello delle altre dita, il prodotto vettoriale è orientato nel verso uscente dal palmo della mano

Se si scambia l'ordine dei due vettori il verso cambia, per cui il prodotto vettoriale NON gode della proprietà commutativa, ma risulta:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

Il modulo del vettore $\vec{u} \times \vec{v}$ è dato dalla formula:

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|sin\theta = |-\vec{u} \times \vec{v}|$$

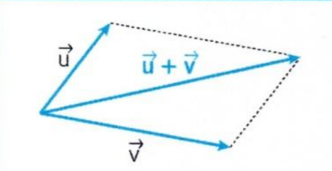
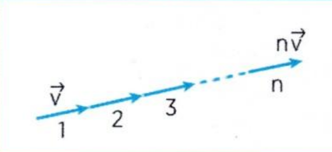
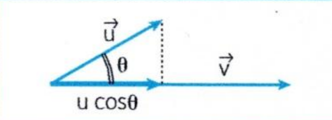
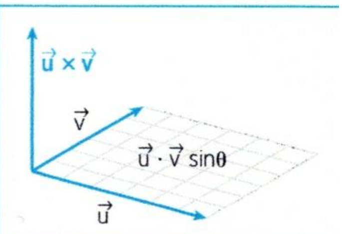
Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:
• anticommutativa (invertendo l'ordine dei vettori il prodotto vettoriale cambia verso)

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

• distributiva rispetto alla somma

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

RICAPITOLANDO

OPERAZIONE		RISULTATO	
somma	$\vec{u} + \vec{v}$	vettore	
prodotto per un numero	$n\,\vec{v}$	vettore	
prodotto scalare	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	numero	
prodotto vettoriale	$\vec{u} \times \vec{v}$	vettore	

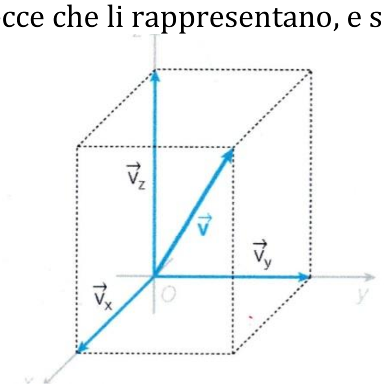
RICORDA: GRANDEZZE FISICHE VETTORIALI E SCALARI

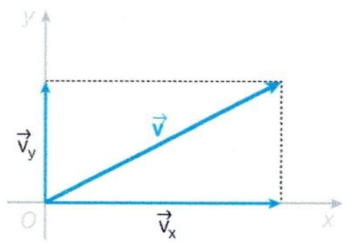
Una grandezza fisica è detta vettoriale quando la sua rappresentazione matematica è un vettore; è detta scalare quando la sua rappresentazione matematica è un numero.

Le grandezze fisiche vettoriali si disegnano come frecce e si sommano tra loro con il metodo punta-coda o con l'equivalente regola del parallelogramma.
Tra le grandezze incontrate finora, sono vettoriali la posizione, lo spostamento, la velocità e l'accelerazione.

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DI UN VETTORE

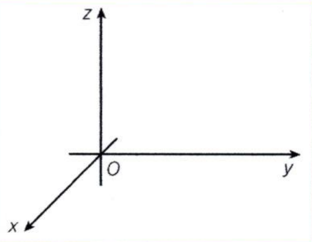
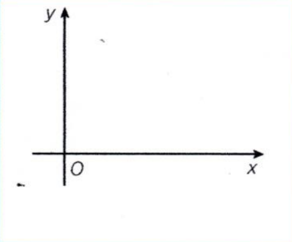
se applichiamo il vettore $\vec{v}$ sull'origine di un sistema di assi cartesiani, esso è univocamente determinato dalle coordinate del suo estremo libero. Le coordinate corrispondono ai moduli dei vettori che scompongono $\vec{v}$ lungo le direzioni degli assi cartesiani, cioè alle lunghezze delle frecce che li rappresentano, e sono dette **componenti cartesiane** del vettore



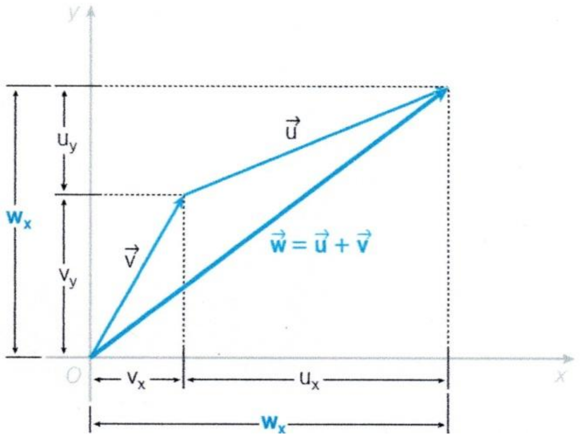


Un vettore è rappresentato:
- da un numero in uno spazio unidimensionale;
- da una coppia di numeri in uno spazio bidimensionale;

- da una terna ordinata di numeri in uno spazio tridimensionale

VETTORI			
NUMERI	(x; y; z) terne di numeri	(x; y) coppie di numeri	(x) numeri

OPERAZIONI CON I VETTORI IN RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA
La rappresentazione cartesiana di un vettore è molto utile per fare i calcoli, perché consente di trasformare le operazioni tra vettori in operazioni tra numeri, seguendo regole opportune.
A titolo di esempio vediamo il caso della somma, che è il più semplice.
SOMMA E DIFFERENZA DI VETTORI IN RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA
➔ **Le componenti del vettore somma sono uguali alla somma delle componenti omologhe.**



$$\vec{u} = (u_x, u_y)$$
$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Come si vede dalla figura, la componente w_x del vettore $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ è uguale alla somma delle componenti u_x e v_x di $\vec{u}$ e $\vec{v}$; analogamente, la componente w_y è uguale alla somma di u_y e v_y

$$\begin{cases} w_x = u_x + v_x \\ w_y = u_y + v_y \end{cases}$$

Analogamente, le componenti cartesiane del vettore differenza $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ sono:

$$\begin{cases} d_x = u_x - v_x \\ d_y = u_y - v_y \end{cases}$$

ESPRESSIONE CARTESIANA DEL PRODOTTO SCALARE
Consideriamo due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e chiamiamo α l'angolo formato dalle loro direzioni. Sappiamo che il prodotto scalare fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che indichiamo con $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è la grandezza *scalare* definita come il prodotto dei moduli a e b dei due vettori per il coseno dell'angolo α fra essi compreso:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \, cos\alpha$$

Il prodotto scalare si può esprimere usando le componenti cartesiane dei vettori.

Dato un sistema cartesiano *Oxy*, i versori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ degli assi, essendo due vettori di modulo uguale a 1 e mutuamente perpendicolari, obbediscono alle relazioni:

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = 1$$
$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{x} = 0$$

Dati due vettori

$$\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\,\hat{y}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{x} + b_y\,\hat{y}$$

appartenenti a un piano cartesiano, si ha pertanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\hat{x} + a_y\,\hat{y}\right) \cdot \left(b_x\hat{x} + b_y\,\hat{y}\right) = a_x b_x + a_y b_y$$

cioè il prodotto scalare fra i due vettori è uguale alla somma dei prodotti delle loro componenti x e y.

Se

$$\vec{a} = 3\hat{x} + 5\,\hat{y}$$
$$\vec{b} = 5\hat{x} - 2\,\hat{y}$$

risulta

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \circ 5 + 5\,(-2) = 15 - 10 = 5$$

Espressione cartesiana del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale fra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che indichiamo con

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

è un *vettore*

$$\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$$

con direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e verso uscente dal palmo della mano destra quando il pollice è disposto nel verso di $\vec{a}$ e le altre dita sono orientate come $\vec{b}$

Il modulo del prodotto vettoriale è uguale al prodotto dei moduli *a* e *b* dei due vettori di partenza per il seno dell'angolo α fra essi compreso

$$p = a \cdot b \sin\alpha$$

Ricordiamo che il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

- anticommutativa (invertendo l'ordine dei vettori il prodotto vettoriale cambia verso):

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

- distributiva rispetto alla somma:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Vediamo ora come esprimerlo nelle sue componenti cartesiane. Scegliamo un sistema cartesiano *Oxyz* avente gli assi *x* e *y* nel piano dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Tenendo conto della definizione di prodotto vettoriale, si trova che per i versori degli assi valgono le relazioni:

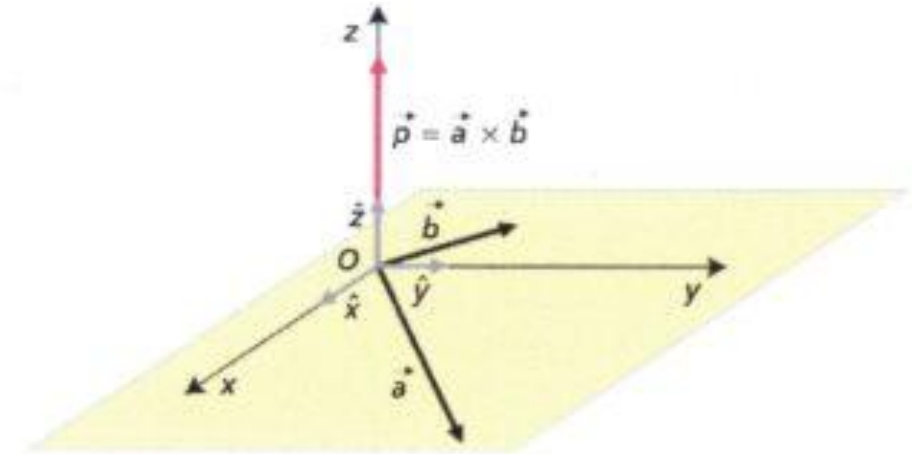
$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = 0$$
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$
$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{x} + a_y\,\hat{y}) \times (b_x\hat{x} + b_y\,\hat{y}) = \;\; = (a_x b_y - a_y\, b_x)\hat{z}$$

Pertanto, in rappresentazione cartesiana, il prodotto vettoriale di due vettori $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ appartenenti al piano *xy* è il vettore $\vec{p}$ diretto lungo l'asse *z* con componente scalare

$$p_z = (a_x\, b_y - a_y\, b_x).$$

Il suo modulo è

$$p = |a_x\, b_y - a_y\, b_x|.$$



Facciamo anche in questo caso un esempio. Consideriamo i due vettori

$$\vec{a} = -4\hat{x} - 2\,\hat{y}$$
$$\vec{b} = 2\hat{x} + 3\,\hat{y}$$

appartenenti al piano *xy*. Il modulo del loro prodotto vettoriale è pari a:

$p = |a_x\, b_y - a_y\, b_x| = |(-4)\ 3 - (-2)\ 2| = |\ -12 + 4| = 8$

È diretto lungo l'asse *z* con componente scalare

$p_z = (a_x\, b_y - a_y\, b_x). = -8$