Radicali algebrici

Si dice radice n-esima di un **numero reale** a quel numero b che elevato a n dà come risultato a.

In simboli

$$\sqrt[n]{a} = b \; \rightarrow \; b^n = a$$

con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Il numero *n* è l'**indice**, *a* è l'argomento della radice o **radicando**.

Dalla definizione si ricava che:

- La radice di indice 0: $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato.
- La radice di indice 1 equivale all'argomento: $\sqrt[1]{a} = a$.
- La radice con argomento nullo è nulla: $\sqrt[n]{0} = 0$
- La radice con indice uguale all'esponente del radicando è pari all'argomento : $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Se la radice ha indice 2 si chiama *radice quadrata*, se l'indice è 3 si chiama *radice cubica*.

$$\begin{cases} n = 0 \; \sqrt[n]{y} \; NON \; HA \; SIGNIFICATO \\ n = 1 \; \sqrt[1]{y} = y \\ n = 2 \; possiamo \; omettere \; l'indice \sqrt[2]{y} = \sqrt{y} \; RADICE \; QUADRATA \; DI \; y \\ n = 3 \; \sqrt[3]{y} \; RADICE \; CUBICA \; DI \; y \\ n = \mathbb{N}_0 \; \sqrt[n]{0} = 0 \end{cases}$$

A seconda che l'indice della radice sia pari o dispari è necessario porre le **condizioni di esistenza** per l'argomento della radice:

- se l'indice *n* è **dispari** $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di $n \in \mathbb{R}$; inoltre è negativa se *a* < 0, positiva se *a* > 0, nulla se *a* = 0;
- se l'indice *n* è **pari,** $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di *a* ≥ 0; inoltre è nulla se *a* = 0, positiva in tutti gli altri casi.

Per i radicali vale la **proprietà invariantiva**: il valore di un radicale non cambia se si moltiplica o divide per uno stesso numero diverso da zero sia l'indice sia l'esponente del radicando:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}}$$

Con *n*, *m*, $r \in \mathbb{N}$, *m* ≠ 0, *n* ≠ 0, *r* ≠ 0, e *a* numero reale.

Applicando la proprietà invariantiva è possibile eseguire le seguenti operazioni di semplificazione.

Semplificazione dei radicali

- si scompone il radicando
- si determinano le eventuali condizioni di esistenza
- si calcola il M.C.D. tra l'indice e gli esponenti
- si dividono indici ed esponenti per M.C.D.

Esempio:

$\sqrt[12]{3^8}$ M.C.D. (8,12) = 4 $\sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12/4]{3^{8/4}} = \sqrt[3]{3^2}$

Riduzione di più radicali allo stesso indice

- si semplificano se possibili i radicali
- si determinano le eventuali condizioni di esistenza
- si calcola il m.c.m. degli indici
- si riscrivono i radicali tutti con lo stesso indice uguale al m.c.m., e si moltiplica contemporaneamente l'esponente di ciascun radicando per il quoziente tra il nuovo indice e l'indice originario.

Esempio

Vogliamo ridurre allo stesso indice i seguenti radicali:

$$(I)\sqrt[6]{x^3y}\,;(II)\sqrt{x^3}\,;(III)\ \sqrt[15]{x^3}$$

C.E. x≥0, y ≥ 0

Osserviamo innanzitutto se possiamo semplificare i radicali dati. I primi due sono irriducibili mentre possiamo semplificare il terzo

M.C.D. (15,3) = 3

$$\sqrt[15/3]{x^{3/3}} = \sqrt[5]{x}$$

Possiamo ora procedere con la riduzione dei radicali ad uno stesso indice.

Calcoliamo il m.c.m. degli indici:

m.c.m. (6,2,5) = 30

Per il primo radicale abbiamo

30 : 6 = 5 per cui

$$\sqrt[6]{x^3y} = \sqrt[6\circ 5]{x^{3\circ 5}y^{1\circ 5}} = \sqrt[30]{x^{15}y^5}$$

Analogamente, per il radicale (II) otteniamo

30 : 2 = 15

Di conseguenza

$$\sqrt{x^3} = \sqrt[2\circ 15]{x^{3\circ 15}} = \sqrt[30]{x^{45}}$$

Per il radicale (III) otteniamo

30 : 5 = 6

$$\sqrt[5]{x} = \sqrt[5\circ 6]{x^{1\circ 6}} = \sqrt[30]{x^6} = \sqrt[30]{x^6}$$

Operazioni con i radicali

Moltiplicazione e divisione

Il prodotto o il quoziente di due radicali (nel caso della divisione il divisore deve essere non nullo) *con lo stesso indice* è il radicale con lo stesso indice che ha per radicando il prodotto o il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^p}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^p}}$$

Se i radicali hanno indici DIVERSI, prima di procedere con la moltiplicazione o divisione, dobbiamo ridurli innanzi tutto allo stesso indice, quindi possiamo moltiplicare i radicandi

Esempio

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5}$$

Riduciamo innanzitutto le radici allo stesso indice, calcolando m.c.m. degli indici

m.c.m. (3,2) = 6

Otteniamo

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[3\circ 2]{2^2} \cdot \sqrt[2\circ 3]{5^3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{500}$

Vogliamo calcolare il seguente quoziente

$$\sqrt[3]{4} : \sqrt{5}$$

Essendo gli indici diversi, dobbiamo innanzitutto ridurre i radicali allo stesso indice.

Calcoliamo il m.c.m. degli indici

m.c.m. (3,2) = 6

Otteniamo

$$\sqrt[3]{4} : \sqrt{5} = \sqrt[3\circ 2]{4^2} : \sqrt[2\circ 3]{5^3} = \sqrt[6]{16} : \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{\frac{16}{125}}$$

Elevamento a potenza

Per la proprietà invariantiva vista prima, per elevare a potenza un radicale basta elevare a potenza il radicando ed eventualmente semplificare il risultato ottenuto:

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{m\cdot p}}$$

Con a ∊ $\mathbb{R}^+$ n,m ∊$\mathbb{N}_0$ p∊$\mathbb{N}$

Esempi

$(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 3^2$

$\left(\sqrt{xy^2}\right)^4 C.E.\, x \geq 0 \quad \left(\sqrt{xy^2}\right)^4 = \sqrt{x^4y^8}$

$\left(\frac{3ab}{2}\sqrt{\frac{2a}{b}}\right)^4 \quad C.E.\, a\ e\ b\ concordi, b \neq 0$

$\left(\frac{3ab}{2}\sqrt{\frac{2a}{b}}\right)^4 = \left(\frac{3ab}{2}\right)^4 \left(\sqrt{\frac{2a}{b}}\right)^4 = \frac{81}{16}a^4b^4 \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^4}$

Possiamo semplificare l'indice della radice e l'esponente del radicando, dividendo entrambi per il M.C.D. (4,2) = 2

$\frac{81}{16}a^4b^4 \sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^4} = \frac{81}{16}a^4b^4 \left(\frac{2a}{b}\right)^2 = \frac{81}{16}a^4b^4 \frac{4a^2}{b^2}$

Semplificando infine le frazioni otteniamo:

$$\frac{81}{\cancel{16}}a^4\cancel{b^4}\frac{4a^2}{\cancel{b^2}} = \frac{81}{4}a^6b^2$$

Estrazione di radice da un radicale (radice di radice)

Si dimostra che

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Con a ∊ $\mathbb{R}^+$, n,m ∊ $\mathbb{N}_0$

Esempi

$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3\cdot 2]{3} = \sqrt[6]{3}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{a^6b^{12}}}} = \sqrt[30]{a^6b^{12}}$$

Siccome

M.C.D. (30,6,12) = 6

possiamo semplificare indice della radice ed esponenti dei radicandi. Otteniamo

$$\sqrt[30]{a^6b^{12}} = \sqrt[30:6]{a^{6:6}b^{12:6}} = \sqrt[5]{ab^2}$$

Trasporto di un fattore sotto il segno di radice

• Se *a* ≥ 0, si può trasportare il fattore dentro il segno di radice dopo averlo elevato all'indice della radice:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb}$$

Esempio:

$$\mathbf{2}\sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{\mathbf{2^5}5} = \sqrt[5]{160}$$

• Se *a* < 0 , allora –a > 0. Possiamo quindi trasportare sotto il segno di radice l'opposto del fattore, dopo averlo elevato all'indice della radice e mettendo il segno – **davanti** al radicale:

$$a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{(-a)^nb} \quad con\ a < 0$$

Esempi

-3√5 = $-\sqrt{[-(-3)]^2 \cdot 5} = -\sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$

$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = -\sqrt[3]{\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^3 \cdot 16} = -\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 16} = -\sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 16} = -\sqrt[3]{8}$$

Trasporto di un fattore fuori dal segno di radice

L'operazione si può eseguire solo se l'esponente del fattore è maggiore o uguale dell'indice.

Prima di trasportare fuori dalla radice un fattore, è necessario scomporre il fattore, porre le condizioni di esistenza del radicando, considerare l'eventuale valore assoluto del fattore, per mantenere la positività del radicale

ESEMPIO

$\sqrt{16x^6y}$

C.E. y≥0

Scriviamo 16 come potenza di 2 :

16 = 2^4

Il nostro radicale diventa:

$\sqrt{2^4x^6y}$

Possiamo trasportare FUORI dal segno di radice solo i fattori con esponente maggiore o uguale all'indice della radice, dividendo gli esponenti per l'indice della radice. Otteniamo:

$$\sqrt{2^4x^6y} = 2^{4:2}x^{6:2}\sqrt{y} = 2^2x^3\sqrt{y} = \ 4x^3\sqrt{y}$$

Vediamo come procedere quando gli esponenti dei fattori sotto radice NON sono multipli dell’indice.

Consideriamo il radicale seguente

$$\sqrt[3]{9a^{11}b^7}$$

Anche in questo caso, dividiamo gli esponenti MAGGIORI o UGUALI dell'indice per l'indice stesso e consideriamo il resto della divisione:

- 11 : 3 = 3 R. 2
- 7 : 3 = 2 R.1

Possiamo scrivere quindi i fattori come prodotto di potenze:

$a^{11} = a^9 \circ a^2$

$b^7 = b^6 \circ b$

Il nostro radicale diventa:

$$\sqrt[3]{9a^9a^2b^6b}$$

A questo punto, ci siamo riportati al caso precedente. Possiamo perciç trasportare FUORI dal segno di radice solo i fattori con esponente maggiore o uguale all’indice della radice, dividendo gli esponenti per l’indice della radice. Otteniamo:

$$\sqrt[3]{9\boldsymbol{a}^{\mathbf{9}}a^2\boldsymbol{b}^{\mathbf{6}}b} =$$

$$= \boldsymbol{a}^{\mathbf{9:3}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{6:3}}\sqrt[3]{9a^2b} =$$

$$= \boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}\sqrt[3]{9a^2b}$$

Addizione

Due radicali sono **simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando; due radicali simili possono differire solo per un FATTORE ESTERNO, detto coefficiente del radicale.

ESEMPIO:

I radicali

4√2 e -√2 sono simili: infatti hanno la stessa “parte radicalica” (√2) e differiscono solo per i coefficienti 4 e -1

Possiamo eseguire l'addizione solo fra radicali simili. La somma algebrica di due radicali simili è il radicale, simile agli addendi, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Per effettuare l'addizione tra due radicali simili è necessario scomporli fino a evidenziare i termini simili.

ESEMPIO

$-3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 16\sqrt{5} = (-3+7+16)\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$

RADICALI DOPPI

Un radicale doppio è formato da una radice quadrata il cui radicando è formato dalla somma di un monomio e di un’altra radice quadrata.

In pratica, un radicale doppio ha la forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

Se

$$(a^2-b)$$

È un quadrato perfetto, allora possiamo semplificare il radicale doppio, trasformandolo nella somma di due radici singole

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

RICORDA: un quadrato perfetto è un numero la cui radice quadrata è un numero naturale. Sono ad esempio quadrati perfetti 4,9,16, 49, 121,…

RAZIONALIZZAZIONE DEI DENOMINATORI

La razionalizzazione permette di eliminare i radicali dal denominatore di una frazione. In questo modo, il denominatore diventa un NUMERO RAZIONALE

Frazioni in cui compaiono radicali al denominatore possono essere trasformate in frazioni in cui i radicali compaiono solo al numeratore.

Questa operazione, detta **razionalizzazione**, si esegue applicando la proprietà invariantiva.

Si possono presentare i seguenti casi:

CASO 1: IL DENOMINATORE È UNA RADICE QUADRATA:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

con $b \neq 0$

CASO 2 : IL DENOMINATORE È UNA RADICE *N*-ESIMA:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

con b ≠0,n>m

Il fattore di razionalizzazione è quindi

$$\sqrt[n]{b^{n-m}}$$

Otteniamo perciò

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}^{n-\boldsymbol{m}}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}^{n-\boldsymbol{m}}}} = \frac{\boldsymbol{a}\,\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{n-\boldsymbol{m}}}}{b}$$

CASO 3: IL DENOMINATORE È LA SOMMA O LA DIFFERENZA TRA RADICALI QUADRATICI:

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b \mp c}$$

con b>0,c>0,b≠c

In questo caso, quindi, il fattore di razionalizzazione è

$$\sqrt{\boldsymbol{b}} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}}$$

Otteniamo perciò

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}}} \cdot \frac{\sqrt{\boldsymbol{b}} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{a(\sqrt{\boldsymbol{b}} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}})}{b - c}$$

Ricordiamo infatti il prodotto notevole

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$(\sqrt{\boldsymbol{b}} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}}) \cdot (\sqrt{\boldsymbol{b}} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}}) =$$

$$= (\sqrt{\boldsymbol{b}})^{\boldsymbol{2}} \mp (\sqrt{\boldsymbol{c}})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{b} \mp \boldsymbol{c}$$

CASO 4 : IL DENOMINATORE È LA SOMMA O LA DIFFERENZA TRA UN NUMERO E UN RADICALE QUADRATICO:

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$$

con b>0,c≥0,b - √c≠0

In questo caso, il fattore di razionalizzazione è

$$b \mp \sqrt{c}$$

Otteniamo perciò

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}}} \cdot \frac{\boldsymbol{b} \mp \sqrt{\boldsymbol{c}}}{\boldsymbol{b} \mp \sqrt{\boldsymbol{bc}}} = \frac{a(b \mp \sqrt{c})}{b^2 \mp c}$$

Ovvero, riassumendo:

$$\frac{a}{b \pm \sqrt{c}} = \frac{a(b \mp \sqrt{c})}{b^2 \mp c}$$

CASO 5 : IL DENOMINATORE È UN BINOMIO CON UNA O DUE RADICI CUBICHE

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}}$$

In questo caso, il fattore di razionalizzazione è

$$\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}$$

Ricordiamo infatti il prodotto notevole "somma o differenza di due cubi"

$$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Nel nostro caso, $(a \pm b)$ corrisponde a

$$\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}$$

e quindi, per ottenere la somma o differenza tra due cubi, dobbiamo moltiplicare e dividere per il trinomio che compare nello sviluppo del prodotto notevole.

Ritornando al nostro radicale, otteniamo:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2}} = \frac{a\,(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{b \pm c}$$

In conclusione:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a\,(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2})}{b \pm c}$$

Frazione	C.E.	FATTORE DI RAZIONALIZZAZIONE	RAZIONALIZZAZIONE
$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}}$	a$\in\mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{a}$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}}$	a$\in\mathbb{R}_0^+$, n>m	$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{n-\boldsymbol{m}}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{n-\boldsymbol{m}}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{n-\boldsymbol{m}}}}=\frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{n-\boldsymbol{m}}}}{a}$
$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}}$	a, b $\in\mathbb{R}_0^+$ $\sqrt{\boldsymbol{a}}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}\neq\mathbf{0}$	$\sqrt{\boldsymbol{a}}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}}\cdot\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{a}}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}{a-b}$
$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}}$	b $\in\mathbb{R}_0^+$ $\boldsymbol{a}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}\neq\mathbf{0}$	$\boldsymbol{a}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}$	$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}\pm\sqrt{\boldsymbol{b}}}\cdot\frac{\boldsymbol{a}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}{\boldsymbol{a}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}=\frac{\boldsymbol{a}\mp\sqrt{\boldsymbol{b}}}{a^2-b}$
$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}$	$\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}\neq\mathbf{0}$ b, c $\in\mathbb{R}_0^+$	$\sqrt[3]{\boldsymbol{b}^{2}}\mp\sqrt[3]{\boldsymbol{bc}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{c}^{2}}$	$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}=$ $\frac{a\,(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b\pm c}$