DEFINIZIONE DI SENO COSENO E TANGENTE

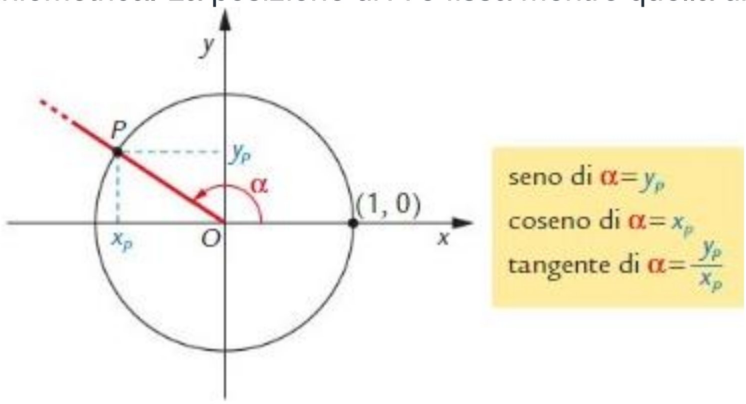
Vediamo ora come sia possibile associare a ogni angolo tre numeri, detti seno, coseno e tangente dell'angolo, dipendenti esclusivamente dall'ampiezza dell'angolo stesso, che ci consentiranno di definire nuove funzioni.

Si consideri una ***circonferenza goniometrica*** cioè una circonferenza centrata nell'origine degli assi cartesiani e di raggio 1.
La sua equazione è

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Dato un angolo α, riferiamolo a un sistema di assi cartesiani ortogonali in modo che si trovi in posizione normale (cioè con il primo lato è sempre quello che giace sull'asse x) e tracciamo la circonferenza goniometrica.

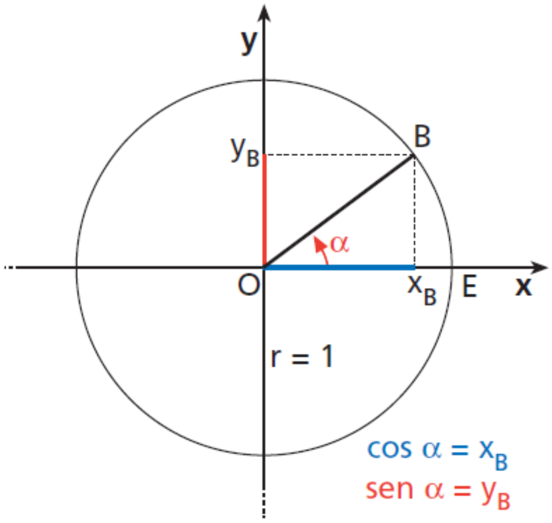
Il vertice di α coincide con O e il suo primo lato coincide con il semiasse positivo delle x. Siano A (1;0) il punto d'intersezione del primo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica e P il punto d'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica. La posizione di A è fissa mentre quella di P varia al variare dell'angolo α.



Chiamiamo:

- seno di α l'ordinata di P: $\sin\alpha = y_P$
- coseno di α l'ascissa di P : = x_P
- tangente di α il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di P

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \cos\alpha \neq 0$$



In pratica, possiamo descrivere qualsiasi punto della circonferenza goniometrica mediante le sue coordinate (x;y) espresse in termini di seno e coseno.

Ad esempio, il punto B(x_B ; y_B) diventa

B(cos α; sinα)

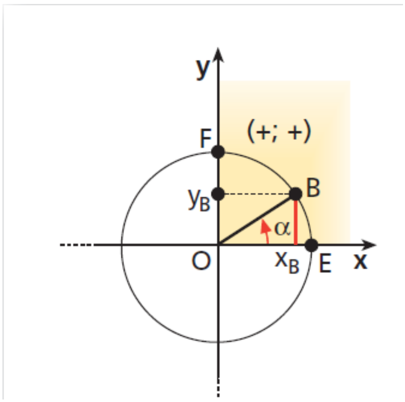
Poiché seno, coseno e tangente di un angolo α variano in funzione dell'angolo, vengono chiamate **FUNZIONI GONIOMETRICHE** di α.

NOTA: Il punto P, le cui coordinate definiscono coseno e seno di α, è detto **PUNTO ASSOCIATO** all'angolo α.

Siccome P appartiene alla circonferenza goniometrica (che ha raggio 1), l'ascissa di P (cioè il coseno di α) e l'ordinata di P (cioè il seno di α)variano tra −1 e 1, potendo anche essere uguali a −1 o a 1.

Le variazioni delle funzioni seno e coseno

Supponiamo che un punto B percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da E, in verso antiorario.



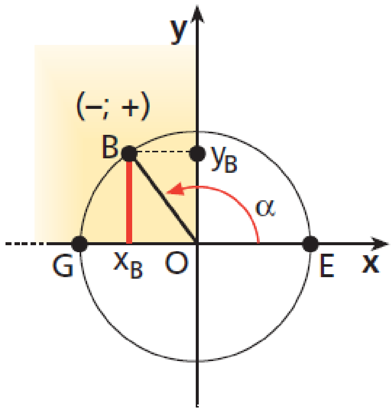
Finché *B* percorre il primo quarto di circonferenza (da 0 a 90°), la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive.
Man mano che *B* si avvicina al punto *F*, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta.
In *F*,

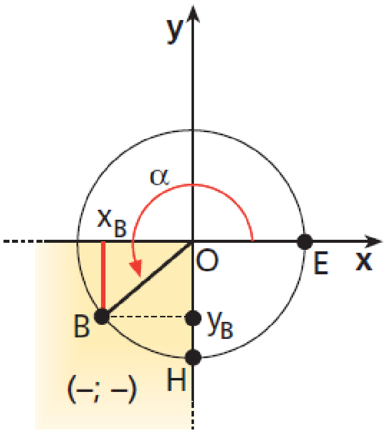
$$x_F = 0,\ y_F = 1.$$

Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante (cioè l'angolo si muove da 90° a 180°), la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa.

Quando B si avvicina a G, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono.

In G abbiamo $x_G = -1$, $y_G = 0$.



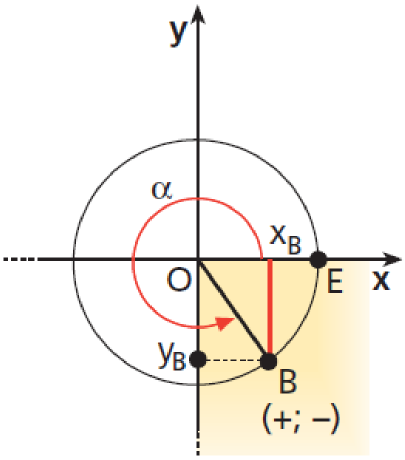


Nel momento in cui B si trova nel terzo quadrante (cioè l'angolo è compreso tra 180° e 270°), la sua ordinata e la sua ascissa sono negative.

Man mano che B si avvicina a H, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce.

In H risulta

$$x_H = 0,\ y_H = -1.$$



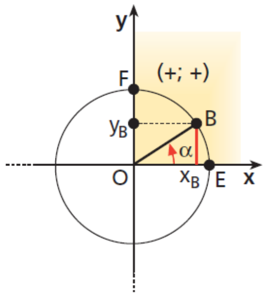
Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, ovvero B si trova nel IV quadrante e l'angolo è compreso tra 270° e 360°, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa diventa positiva. Avvicinandosi a E, sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano.

In E sappiamo che

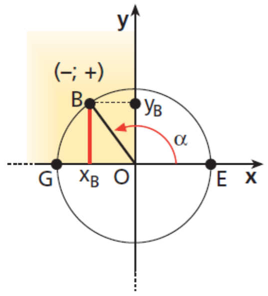
$$x_E = 1,\ y_E = 0.$$

Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1, quindi per ogni angolo α abbiamo :

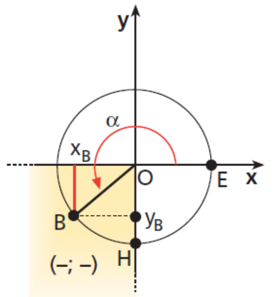
- $-1 \le \sin\alpha \le 1$
- $-1 \le \cos\alpha \le 1$



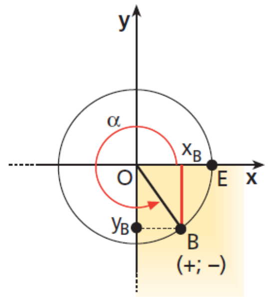
a. Finché *B* percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che *B* si avvicina al punto *F*, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta.
In *F*, $x_F = 0$, $y_F = 1$.



b. Quando *B* percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Quando *B* si avvicina a *G*, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono.
In *G*, $x_G = -1$, $y_G = 0$.



c. Se *B* si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che *B* si avvicina a *H*, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce.
In *H*, $x_H = 0$, $y_H = -1$.



d. Quando *B* percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a *E*, sia l'ascissa sia l'ordinata di *B* aumentano.
In *E*, $x_E = 1$, $y_E = 0$.

Come possiamo dedurre da quanto visto sopra, risulta inoltre:

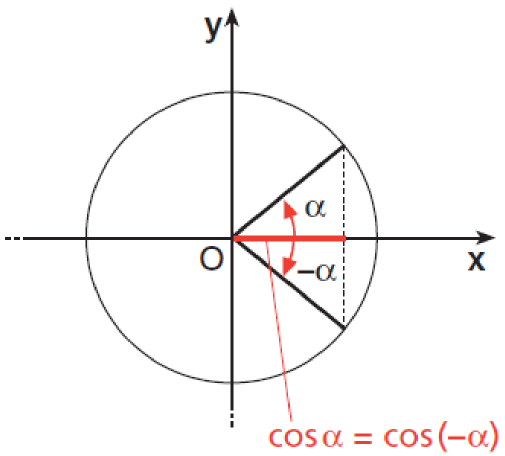
cos α = cos(- α)

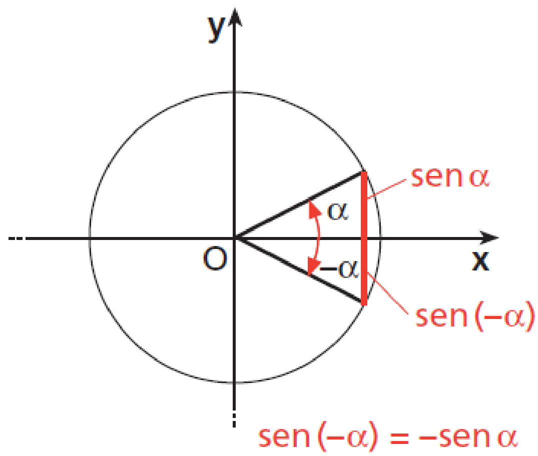
ovvero: il coseno è una funzione pari.

Essendo invece

sen(- α) = -sen α

allora il seno è una funzione dispari.





Possiamo costruire il grafico delle funzioni y = sin x e y = cos x in [0; 2π] riportando sull'asse x i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse y le ordinate dei punti che stanno sulla circonferenza goniometrica oppure le ascisse dei punti della circonferenza goniometrica in corrispondenza degli angoli.

RICORDA:

- per costruire il grafico del seno riportiamo sull'asse y i valori delle ordinate dei punti della circonferenza goniometrica. Tale grafico prende il nome di SINUSOIDE

- per costruire il grafico del coseno riportiamo sull'asse y i valori delle ASCISSE dei punti della circonferenza goniometrica. Il grafico del coseno prende il nome di COSINUSOIDE

Otteniamo

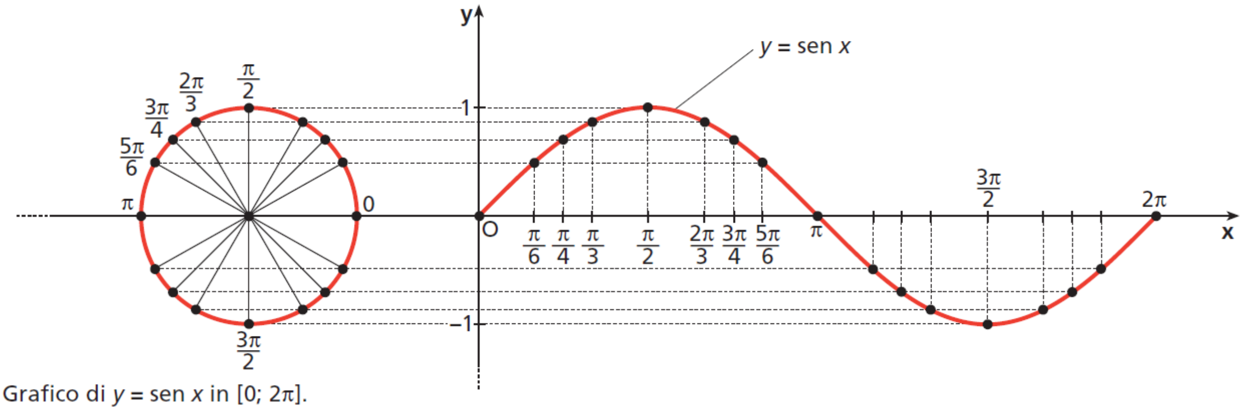


Grafico di $y = \text{sen}\, x$ in $[0; 2\pi]$.

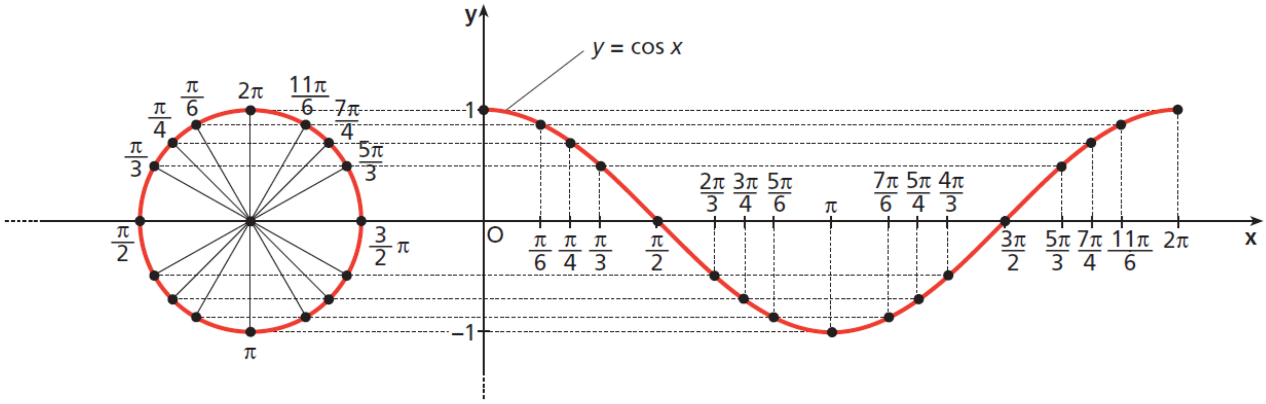


Grafico di $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$.

Dopo aver percorso un giro completo, il punto B può ripetere lo stesso movimento quante volte vogliamo. Le funzioni sen x e cos x assumono di nuovo gli stessi valori ottenuti al «primo giro», ossia:

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 4\pi) = \sin(\alpha + 6\pi) = \ldots..$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 4\pi) = \cos(\alpha + 6\pi) = \ldots..$

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo 2π. Possiamo scrivere, in modo sintetico:

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \forall\alpha \in R, \forall k \in Z$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \; \forall\alpha \in R, \forall k \in Z$

Essendo quindi due funzioni periodiche di periodo 2π, i grafici si ottengono ripetendo ogni 2π i grafici relativi all'intervallo [0; 2π].

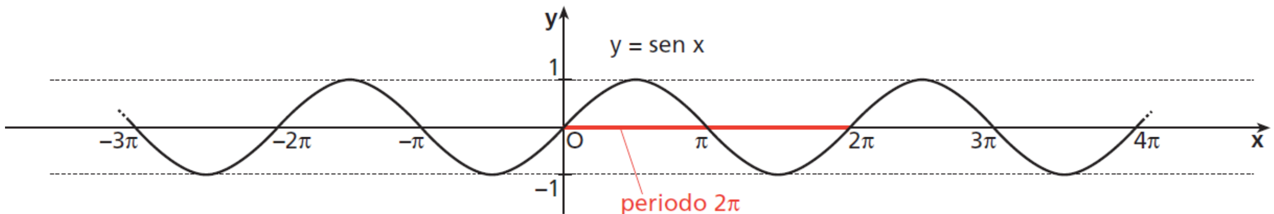


Grafico di y = sen x.

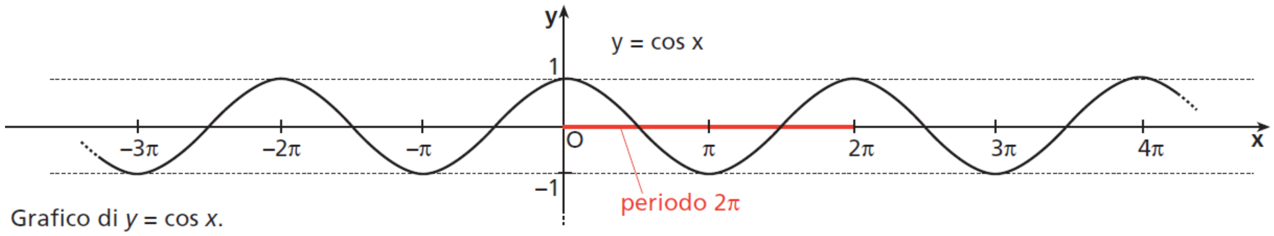


Grafico di y = cos x.