SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RICONOSCIMENTO DI PRODOTTI NOTEVOLI

Sappiamo già che i prodotti notevoli ci consentono di svolgere più rapidamente alcuni calcoli tra polinomi. Possiamo però utilizzarli per eseguire alcune scomposizioni. Se riusciamo a ricondurre un polinomio a uno dei prodotti notevoli che conosciamo, allora possiamo scomporlo in fattori.

Otteniamo quindi le seguenti regole

REGOLA DI SCOMPOSIZIONE	**FORMULA**
Quadrato di un BINOMIO	$A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$
Differenza di due quadrati	$A^2-B^2 = (A+B)(A-B)^2$
Quadrato di un TRINOMIO	$A^2+B^2 + C^2 + 2AB+2AC +2BC= (A+B+C)^2$
Cubo di un BINOMIO	$A^3 + 3A^2B+3AB^2 + B^3= (A+B)^3$

Vediamo insieme alcuni esempi

REGOLA DI SCOMPOSIZIONE	**FORMULA**	**Esempio**
Quadrato di un BINOMIO	$A^2+2AB+B^2 = (A+B)^2$	$4x^2+4x+1=(2x)^2+\underbrace{2\cdot(2x)\cdot 1}+1^2=(2x+1)^2$ $A^2 + 2\cdot A\cdot B + B^2=(A+B)^2$ $a^2-6a+9=a^2-\underbrace{2\cdot a\cdot 3}+3^2=(a-3)^2$ $A^2-2\cdot A\cdot B+B^2=(A-B)^2$
Differenza di due quadrati	$A^2-B^2=$ $(A+B)(A-B)$	$4a^2-9=(2a)^2-3^2=(2a-3)(2a+3)$ $A^2 - B^2=(A-B)(A+B)$ $x^6-y^2=(x^3)^2-y^2=(x^3-y)(x^3+y)$ $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$
Quadrato di un TRINOMIO	$A^2+B^2+C^2+2AB+$ $+2AC+2BC=$ $(A+B+C)^2$	$x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz=$ $=x^2+(2y)^2+z^2+\underbrace{2\cdot x\cdot(2y)}+\underbrace{2\cdot x\cdot z}+\underbrace{2\cdot(2y)\cdot z}=(x+2y+z)^2$ $A^2+B^2+C^2+2\cdot A\cdot B+2\cdot A\cdot C+2\cdot B\cdot C=(A+B+C)^2$
Cubo di un BINOMIO	$A^3 + 3A^2B+3AB^2 +$ $B^3= (A+B)^3$	$8a^3+12a^2+6a+1=$ $=(2a)^3+\underbrace{3\cdot(2a)^2\cdot 1}+\underbrace{3\cdot(2a)\cdot 1^2}+1^3=(2a+1)^3$ $A^3+3\cdot A^2\cdot B+3\cdot A\cdot B^2+B^3=(A+B)^3$ $x^3-9x^2+27x-27=$ $=x^3-\underbrace{3\cdot x^2\cdot 3}+\underbrace{3\cdot x\cdot 3^2}-3^3=(x-3)^3$ $A^3-3\cdot A^2\cdot B+3\cdot A\cdot B^2-B^3=(A-B)^3$

ESEMPIO 1 ⇒ QUADRATO DI UN BINOMIO

Se ci troviamo davanti un trinomio, verifichiamo se può trattarsi del quadrato di un binomio. Riconosciamo innanzi tutti i due quadrati e poi verifichiamo il doppio prodotto.

Ad esempio nel trinomio

$x^6 -6x^3 + 9$

$$\underset{\overset{\uparrow}{A^2}}{x^6} \quad - \quad \underset{\overset{\uparrow}{2AB}}{6x^3} \quad \underset{\overset{\uparrow}{B^2}}{+\,9}$$

riconosciamo che x^6 e 9 sono i due quadrati di x^3 e ±3. Dobbiamo verificare ora che $-6x^3$ sia il doppio prodotto dei due termini. Risulta $-6x^3= 2(-3)x^3$

Abbiamo perciò

$x^6 -6x^3 + 9 = (x^3-3)^2$

ESEMPIO 2: DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

$$4a^2 - \frac{1}{81} = (2a)^2 - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left(2a + \frac{1}{9}\right)\left(2a - \frac{1}{9}\right)$$

$$\overset{A^2}{4a^2} - \overset{B^2}{\frac{1}{81}} = \overset{A^2}{(2a)^2} - \overset{B^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^2} = \overset{(A+B)}{\left(2a + \frac{1}{9}\right)}\overset{(A-B)}{\left(2a - \frac{1}{9}\right)}$$

riconosciamo la **differenza di quadrati**

scriviamo i due fattori con **somma e differenza**

ESEMPIO 3 : QUADRATO DI UN TRINOMIO

Consideriamo il seguente polinomio

$a^2 + 9 + 6a + b^2 + 2ab + 6b$

Esso è composto da sei termini e possiamo verificare se si tratta dello sviluppo del quadrato di un trinomio. Identifichiamo i quadrati. In questo caso sono a^2 , 9 e b^2

Verifichiamo che i termini rimanenti sono i doppi prodotti delle basi. Risulta

6a = 2(a) (3)

2ab = 2 (a) (b)

6b = 2 (3) (c)

Abbiamo quindi lo sviluppo del quadrato del trinomio e possiamo scrivere:

$a^2 + 9 + 6a + b^2 + 2ab + 6b = (a+3+b)^2$

ESEMPIO 4: CUBO DI UN BINOMIO

$x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$

$A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$

Verifichiamo che si tratti dello sviluppo del cubo di un binomio. Individuiamo innanzitutto i due cubi e poi verifichiamo che i termini rimanenti siano i tripli prodotti. In questo caso i due cubi sono x^3 e 8, che sono rispettivamente il cubo di x e di 2.

Controlliamo ora i tripli prodotti:

$6x^2 = 3\,(x)^2\,(2)$

$12x = 3\,(x)\,(2)^2$

In conclusione risulta:

$x^3 + 8 + 6x^2 + 12x = (x+2)^3$

RICAPITOLANDO: per poter concludere che un polinomio è lo sviluppo di un prodotto notevole, bisogna controllare che tutti i suoi termini coincidano con il prodotto notevole ipotizzato.

Per esempio, a un primo sguardo, potremmo pensare che il trinomio

$x^2 + 2xy + 4y^2$ sia il quadrato di un binomio perché riconosciamo in esso due termini, x^2 e $4y^2$, che sono rispettivamente i quadrati di x e di 2y; tuttavia l'ulteriore termine, 2xy, non è il doppio prodotto di x e di 2y. Dunque, in questo caso, il trino-mio dato non è il quadrato di un binomio

ESERCIZI : Scomponi in fattori.

- $a^3 - 3a^2 - 1 + 3a$
- $a^8 - 4$
- $x^2 + 4y^2 + 10x - 20y + 25 - 4xy$
- $9a^2 + b^4 + 6ab^2$
- $16a^4 + 4a^2b^2 + 1/4\, b^4$
- **$-4x^2 + 20x - 25 = -1\,(4x^2 - 20x + 25) =$ ………..**
- $(x + y)^2 + 4a^2 + 4a(x + y)$
- $8a^9 + 36a^6 + 54a^3 + 27$
- $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
- $xy^2 - x - 2y^2 + 2$
- $(x - 6)^2 - 4$;
- $a^4 - 2a^2b + b^2 - 4a^2$
- $x^4 - 18x^2 + 81$
- $x^9 + 3x^7 + x^3 + 3x^5$
- $a^6 - 3a^4y^4 + 3a^2y^8 - y^{12}$.