Divisione con resto tra due polinomi in una variabile

Dati due polinomi A e B in una variabile, con $B \neq 0$, esistono sempre, e sono unici, due polinomi Q e R tali che:

$$A = Q \cdot B + R$$

R è nullo oppure è un polinomio di grado minore del grado di B

- Q si dice **quoziente**
- R si dice **resto**

Sussistono i seguenti teoremi

TEOREMA DEL RESTO

Se un polinomio P(x), di grado maggiore o uguale a 1, viene diviso per (x - a), il resto della divisione è costante e uguale a P(a).

Dal teorema precedente sappiamo che esistono due polinomi Q(x) ed R(x) tali che:

P(x) = Q(x)(x - a) + R(x)

Poiché il divisore è di primo grado, allora o R(x) è uguale a zero o R(x) ha grado 0.

In ogni caso, il resto deve essere un numero, che chiamiamo R. Deve quindi valere un'uguaglianza del tipo:

P(x) = Q(x) (x - a) + R

Questa uguaglianza è vera per ogni valore di x. In particolare, con x = a, si ha:

P(a) = Q(a) (a - a) + R

da cui: P(a) = R

TEOREMA DI RUFFINI

Sappiamo che:

- un polinomio P(x) è divisibile per (x - a) se e solo se il resto della divisione di P(x)per (x - a) è 0;
- il resto della divisione di P(x) per (x - a) è uguale a P(a).

Combinando questi due fatti, si ottiene il criterio per stabilire se un polinomio P(x) è divisibile per un binomio del tipo (x - a)

→ TEOREMA DI RUFFINI : ENUNCIATO

Un polinomio P(x) è divisibile per (x - a) se e solo se P(a) = 0.

Vediamo ora come applicare i due teoremi

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DEL RESTO

Troviamo il resto della divisione di $P(x) = x^4 - 10x^2 - 9x + 7$ per:

a) $x – 3$

b) $x +1$

a) Poiché $x - 3$ è del tipo $x - a$, con $a = 3$, per il teorema precedente il resto è uguale a $P(3)$, cioè al polinomio ottenuto sostituendo alla x il valore 3. Otteniamo:

$P(3) = 3^4 - 10 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 7 = 81 - 90 - 27 + 7 = -29$

quindi il resto è uguale a -29.

b) Riscriviamo il binomio nella forma $x - a$. Poiché $x + 1 = x - (-1)$, si ha $a = -1$.Quindi il resto della divisione è uguale a $P(-1)$. Essendo

$P(-1) = (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 7 = 1 - 10 + 9 + 7 = 7$

possiamo concludere che il resto è uguale a 7.

ESERCIZIO TIPO

Calcolare il resto delle seguenti divisioni, senza eseguirle

1) $(5x^2 + 6x - 8) : (x - 2)$

Per il teorema del resto, sostituiamo alla variabile *x* il valore 2. Otteniamo così il resto: $P(2) = 5(2)^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 24$.

2) $(3y^5 - 2y + 4) : (y + 1)$

Per poter applicare il teorema del resto, dobbiamo ricondurre il divisore alla forma (y-a). Per fare questo, dobbiamo scrivere (y-(-1)).

A questo punto, sostituiamo a *y* -1 ed otteniamo il resto:

$P(- 1) = 3(- 1)^5 - 2(- 1) + 4 = 3$.

In pratica: dobbiamo calcolare il resto per il valore di a **opposto** a quello in cui compare nel binomio divisore

Applicazione del teorema di Ruffini

Stabiliamo se il polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ è divisibile per:

a. $x - 1$

b. $x + 2$

a. Siccome $x - 1$ è un binomio del tipo $x - a$, con $a = 1$, dobbiamo controllare se $P(1) = 0$. Abbiamo: $P(1) = 2 \cdot 13 - 12 + 3 \cdot 1 - 4 = 0$ quindi $P(x)$ è divisibile per $x - 1$.

b. Per controllare la divisibilità per x + 2, dobbiamo prima riscrivere x + 2 nella forma x - a. Poiché x + 2 = x - (-2), dobbiamo calcolare P(-2).P(-2) = 2 · (-2)3 - (-2)2 + 3 · (-2) - 4 = - 16 - 4 - 6 - 4 = -30

Poiché P(-2) ≠ 0, concludiamo che P(x) non è divisibile per x + 2.

Esercizi : la regola di Ruffini

RICORDA. La regola di Ruffini si applica quando il divisore è un binomio di primo grado. Per poterla utilizzare, dobbiamo ordinare il polinomio dividendo secondo le potenze decrescenti della variabile che stiamo considerando

Esegui le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

98 $(x^3+2x^2+x+1):(x-2)$ $[Q(x)=x^2+4x+9, R=19]$

99 $(2a^4-a^2-a+1):(a+1)$ $[Q(a)=2a^3-2a^2+a-2, R=3]$

100 $(x^5-2x^3+4x+3):(x+2)$ $[Q(x)=x^4-2x^3+2x^2-4x+12, R=-21]$

101 $(x^4+3x^3+x^2+4x+3):(x+3)$ $[Q(x)=x^3+x+1, R=0]$

102 $(x^4+4x^3+4x^2-x-2):(x+2)$ $[Q(x)=x^3+2x^2-1, R=0]$

103 $(b^4-2b^3-3b-1):(b-1)$ $[Q(b)=b^3-b^2-b-4, R=-5]$

104 $(m^4+3m^3+m-1):(m+3)$ $[Q(m)=m^3+1, R=-4]$

105 $(x^3-4x^2-x-4):(x-4)$ $[Q(x)=x^2-1, R=-8]$

106 $(y^4+y-4):(y+2)$ $[Q(y)=y^3-2y^2+4y-7, R=10]$

107 $(x^4-3x^3-1):(x-3)$ $[Q(x)=x^3, R=-1]$

108 $(x^5+1):(x+1)$ $[Q(x)=x^4-x^3+x^2-x+1, R=0]$

109 Videolezione $(y^5-2y^4-y-1):(y+1)$ $[Q(y)=y^4-3y^3+3y^2-3y+2, R=-3]$

110 $(9b^3-6b^2-12b+3):\left(b-\frac{1}{3}\right)$ $\left[Q(b)=9b^2-3b-13, R=-\frac{4}{3}\right]$

111 $(2t^3+t^2+1):\left(t-\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(t)=2t^2+2t+1, R=\frac{3}{2}\right]$

112 $(x^4+2x^3-3x^2+x-3):(x-2)$ $[Q(x)=x^3+4x^2+5x+11, R=19]$

113 $\left(b^3-\frac{1}{2}b-1\right):\left(b+\frac{1}{2}\right)$ $\left[Q(b)=b^3-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}, R(b)=-\frac{7}{8}\right]$

114 $(0{,}5t^4-0{,}25t^2-1):(t+2)$ $\left[Q(t)=\frac{1}{2}t^3-t^2+\frac{7}{4}t-\frac{7}{2}, R=6\right]$

115 $(0{,}\overline{3}x^3-0{,}\overline{6}x^2-1):(x-3)$ $\left[Q(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+1, R=2\right]$

116 $\left[(m-1)^3-m^2+1\right]:(m-1)$ $[Q(m)=m^2-3m, R=0]$

Determina, mediante la regola di Ruffini, quoziente e resto delle seguenti divisioni, scegliendo come variabile la lettera indicata a fianco e considerando le altre lettere come costanti.

118 $(x^3 - ax^2 + 3x - 3a) : (x - a)$ variabile: x $[Q(x) = x^2 + 3, R(x) = 0]$

119 $(2 - xy^2 - y + xy^3) : (y - 1)$ variabile: y $[Q(y) = xy^2 - 1, R(y) = 1]$

120 $(ax^3 + a^2x^2 + x + 1) : (x + 1)$ variabile: x $[Q(x) = ax^2 + (a^2 - a)x - a^2 + a + 1, R(x) = a^2 - a]$

121 $(x^4 - a^2x^2 + x + 1) : (x - a)$ variabile: x $[Q(x) = x^3 + ax^2 + 1, R(x) = a + 1]$

122 $(x^3 - kx^2 + x + k + 1) : (x + 2)$ variabile: x $[Q(x) = x^2 - (k + 2)x + 2k + 5, R(x) = -3k - 9]$

123 $(a^3 - ba^2 + ab^2 + b^3) : (a + 2b)$ variabile: a $[Q(a) = a^2 - 3ba + 7b^2, R(a) = -13b^3]$

Sfruttando la regola di Ruffini, effettuiamo la divisione

$(2x^3 - 3x - 1) : (2x - 1)$.

Ricordiamo anzitutto la proprietà invariantiva della divisione con resto: se dividiamo sia il dividendo sia il divisore per uno stesso numero, il quoziente non cambia mentre il resto risulta anch'esso diviso per quel numero.

Fissiamo ora l'attenzione sulla divisione: $(2x^3 - 3x - 1) : (2x - 1)$

Il divisore non è del tipo $x+a$, quindi non siamo nelle condizioni per potere utilizzare subito la regola di Ruffini. Tuttavia, possiamo ricondurci a questo caso, grazie alla proprietà ricordata.

Infatti, se dividiamo per 2 **sia il dividendo sia il divisore**, siamo ricondotti alla divisione

$$\left(x^3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad [*]$$

che possiamo effettuare utilizzando la regola di Ruffini.

Il quoziente di questa divisione è lo stesso della divisione originaria, mentre il resto risulta diviso per 2; perciò, per ottenere il resto della divisione originaria, occorre moltiplicare per 2 il resto della [*]

Effettuiamo la divisione con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{9}{8} \end{array}$$

Ne deduciamo che:

•il quoziente della divisione data è

$$Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

il resto della divisione data è

$$R = 2 \cdot (-\frac{9}{8}) = -\frac{9}{2}$$

| $(x^3 + 2x^2 + x + 1) : (2x - 1)$ $\left[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{9}{8}, R = \frac{17}{8}\right]$

| $(x^3 + 2x^2 + 4x + 2) : (2x + 1)$ $\left[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{13}{8}, R = \frac{3}{8}\right]$

| $(2a^3 - a - 1) : (2a + 3)$ $\left[Q(a) = a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{7}{4}, R = -\frac{25}{4}\right]$

| $\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) : (2x + 3)$ $\left[Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}, R = -5\right]$

| Videolezione $(4x^3 - 2x - 1) : (2x + 1)$ $\left[Q(x) = 2x^2 - x - \frac{1}{2}, R = -\frac{1}{2}\right]$

| $(2^{-1}x^2 - 2^{-2}x^3 + x + 1) : (2^{-1}x + 1)$ $\left[Q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2, R = 3\right]$

IL TEOREMA DEL RESTO E IL TEOREMA DI RUFFINI

Esercizio guidato:

Determina il resto della divisione $(x^3 - 2x^2 + 3x + 2) : (x + 1)$ senza effettuarla.

Detto $P(x)$ il polinomio $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$, il resto della divisione di $P(x)$ per $(x + 1)$ è uguale a $P(-1)$, per il teorema del resto.

Essendo

$P(-1)$ =...................

puoi concludere che il resto della divisione è ....

ESERCIZI IL TEOREMA DEL RESTO

Senza effettuare le seguenti divisioni, determinane il resto.

$(x^4 - 2x^3 - 2) : (x - 2)$ $[-2]$

$(x^4 + x^3 - x^2 - 1) : (x + 2)$ $[3]$

$(b^3 - 3b - 7) : (b - 3)$ $[11]$

137 $(x^5 - x^3 - x - 1) : (x + 1)$ $[0]$

138 $(t^4 - t^3 - 2t^2 - 2t + 4) : (t - 2)$ $[0]$

139 $(2y^3 - 4y^2 - y - 1) : (y - 0{,}5)$ $\left[-\frac{9}{4}\right]$

ESERCIZI IL TEOREMA DI RUFFINI

ESERCIZIO 1:

Stabilisci se il polinomio

$P(x) = x^3 - x^2 - 4$ è divisibile per i binomi: $x + 2$, $x - 2$, $2x - 1$.

• Per stabilire se il polinomio P(x) è divisibile per x+ 2 , in base al teorema di Ruffini, dobbiamo controllare se P(−2) è uguale a 0.

Essendo $P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 4 =$.............. ,

puoi concludere che il polinomio non è .... per x+ 2 .

•Ragiona analogamente per il binomio x− 2 .

Essendo P(2) =.......... , il polinomio .... per x− 2 .

• Osserva che 2x− 1 = 2 (x−1/2) e che il polinomio P(x) è divisibile per 2x− 1 se e solo per P(x) è divisibile per(x−1/2) .

Per stabilire se P(x) è divisibile per 2x− 1 basta quindi calcolare P (1/2)

Stabilisci se ciascuno dei seguenti polinomi è divisibile per i binomi indicati a fianco.

145 $3a^4 - a^3 - a - 1$ $\quad a-1,\ a+1,\ a+2$

146 $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ $\quad x+2,\ x+1,\ x-1,\ x-2$

147 $a^4 + a^3 - 5a^2 + a - 6$ $\quad a+2,\ a+3,\ a-2,\ a-3$

148 $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $\quad x+2,\ x+1,\ x-1,\ x-2$

149 $a^4 + a + 1$ $\quad a+1,\ a+2,\ a+3$

150 $2x^3 - x^2 + 2x - 1$ $\quad x+\frac{1}{2},\ x+1,\ x-\frac{1}{2},\ 2x-3$

151 $6x^3 - 7x^2 - 9x - 2$ $\quad 2x+1, 2x-1, 3x+1$

ESERCIZIO GUIDATO

Determiniamo per quale valore di k il polinomio $P(x) = x^3 + (k-1)x^2 - 2kx + k - 1$ è divisibile per x− 2 .

Per il teorema di Ruffini, il polinomio $P(x) = x^3 + (k-1)x^2 - 2kx + k - 1$ è divisibile per x−2 se e solo se P(2) = 0 .

Calcoliamo anzitutto P(2) :

$P(2) = 2^3 + (k-1)\cdot 2^2 - 2k\cdot 2 + k - 1 = 8 + 4k - 4 - 4k + k - 1 = 3 + k$

La condizione P(2) = 0 equivale a 3 +k= 0 , da cui: k=−3

Determina per quale valore di k il polinomio è divisibile per il binomio indicato a fianco.

156 $kx^2 - x - 1$ $\quad x+1$ $\quad [k=0]$

157 $x^3 - kx^2 + x + 1$ $\quad x-1$ $\quad [k=3]$

158 $x^4 - x^2 - k$ $\quad x-2$ $\quad [k=12]$

159 $2x^3 + x^2 + x + k$ $\quad x+2$ $\quad [k=14]$

160 $x^3 + (1-k)x^2 - kx$ $\quad x+1$ $\quad$ [Per ogni k]

161 $x^4 - x^3 - kx + k - 2$ $\quad x-2$ $\quad [k=6]$

162 $kx^3 + 3x^2 - kx - 8$ $\quad x-1$ $\quad$ [Per nessun k]

163 **Videolezione** $x^3 + x^2 + 2x + k;\ x+3$ $\quad [k=24]$

164 $x^3 + 2x^2 - kx - 2k$ $\quad x+2$ $\quad$ [Per ogni k]

165 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + k$ $\quad x+1$ $\quad [k=1]$

166 $x^2 + 2x - k$ $\quad x-3$ $\quad [k=15]$

167 $x^5 - 2x^3 + kx^2 - 3k - 8$ $\quad x-2$ $\quad [k=-8]$

168 $2x^3 - x^2 + x + k$ $\quad x-0{,}25$ $\quad \left[k=-\frac{7}{32}\right]$

169 $x^3 - 2x^2 + kx - 1$ $\quad 2x+1$ $\quad \left[k=-\frac{13}{4}\right]$

170 $9x^4 - 3x^3 - 3x + k + 1$ $\quad 3x-1$ $\quad [k=0]$