LA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI

1) Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado minore o uguale a quello del polinomio dato
2) Polinomio riducibile e polinomio irriducibile

Un polinomio si dice:

•riducibile quando è scomponibile in fattori, ciascuno dei quali di grado minore del grado del polinomio;

•irriducibile, quando NON è scomponibile in fattori, ciascuno dei quali di grado minore del grado del polinomio;.

«Fattorizzazione di un polinomio» è sinonimo di «scomposizione di un polinomio»

SCOMPORRE UN POLINOMIO significa quindi scriverlo come PRODOTTO DI POLINOMI DI GRADO MINORE O UGUALE a quello del polinomio dato

Un polinomio RIDUCIBILE si può quindi scrivere come PRODOTTO DI POLINOMI, ciascuno con grado MINORE del grado del polinomio dato.

Un polinomio IRRIDUCIBILE NON si può scrivere come prodotti di polinomi aventi tutti grado minore di quello dato

Ad esempio x^2-9 è un polinomio riducibile. Esso può infatti essere scomposto nel prodotto di due fattori, entrambi con grado minore a quello dato. Risulta infatti

$x^2-9 = (x+3)\ (x-3)$

$x^2 + 9$ è IRRIDUCIBILE

Sono **IRRIDUCIBILI** i binomi di primo grado: per esempio $a+ 1$ o $2x+ 3$ non possono essere scomposti.

IL RACCOGLIMENTO TOTALE

Il raccoglimento totale è un metodo di scomposizione basato sulla proprietà distributiva della moltiplicazione:

$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$.

Applicando questa proprietà, per effettuare il raccoglimento totale procediamo in senso inverso rispetto a quando moltiplichiamo un monomio per un polinomio o a quando moltiplichiamo due polinomi: se tutti i termini di un polinomio hanno un fattore comune, lo possiamo raccogliere.

In altre parole: quando moltiplichiamo un monomio per un polinomio, applichiamo la proprietà distributiva e moltiplichiamo il monomio per ciascun termine del polinomio.

Se tutti i termini di un polinomio hanno un fattore in comune, possiamo scomporre il polinomio applicando la proprietà distributiva «al contrario».

In pratica, per eseguire un raccoglimento totale, calcoliamo il M.C.D. tra i termini del polinomio.

ESEMPIO 1

Dato il polinomio

$24a^3 - 48a$

Il M.C.D. tra $24a^3$ e $48a$ è $24a$. Possiamo quindi dividere tutti i termini del binomio dato per il M.C.D. e otteniamo:

$24a (a^2 - 2)$

Diciamo che il fattore 24a è stato "MESSO IN EVIDENZA" o "RACCOLTO".

ESEMPIO 2

Vogliamo scomporre il polinomio

$20x^5 + 35x^4 - 5x^3$

Calcoliamo il M.C.D. tra i monomi $20x^5$, $35x^4$ e $5x^3$

M.C.D.$(20x^5, 35x^4, 5x^3) = 5x^3$

Dividiamo tutti i termini per il M.C.D. e otteniamo

$20x^5 + 35x^4 - 5x^3 = 5x^3 (4x^2+7x-1)$

$20x^5 + 35x^4 - 5x^3 =$	M.C.D.$(20x^5, 35x^4, -5x^3) = 5x^3$
$= 5x^3 \cdot 4x^2 + 5x^3 \cdot 7x - 5x^3 \cdot 1 =$	Mettiamo in evidenza $5x^3$ nei tre termini del polinomio
$= 5x^3(4x^2 + 7x - 1)$	Proprietà distributiva

Nella pratica, il passaggio intermedio si fa mentalmente e si scrive direttamente la scomposizione:

$20x^5 + 35x^4 - 5x^3 = 5x^3 (4x^2+7x -1)$

ESEMPIO 3
È possibile raccogliere anche un polinomio.
Scomponiamo il polinomio
$2x(x+ 1) - 3(x+ 1)$

$$2x\underline{(x+1)} - 3\underline{(x+1)} = \underline{(x+1)}(2x-3)$$

È possibile raccogliere il fattore $(x+1)$

ESERCIZI

Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi

a. $12a^3 - 6a^2b^2 + 9ab$;

b. $4x^3 + 2x^2$;

c. $5a(2x + y) - 3(2x + y)$.

a. $12a^3 - 6a^2b^2 + 9ab =$

Calcoliamo il M.C.D. $(12a^3, 6a^2b^2, 9ab) = 3a$.

Mettiamo in evidenza tale fattore :

$3a \cdot 4a^2 - 3a \cdot 2ab^2 + 3a \cdot 3b$

Raccogliamo tale fattore:

$3a \cdot (4a^2 - 2ab^2 + 3b)$

b. $4x^3 + 2x^2 =$

Calcoliamo il M.C.D. $(4x^3, 2x^2) = 2x^2$.

Mettiamo in evidenza tale fattore :

$2x^2 \cdot 2x + 2x^2 \cdot 1$

Raccogliamo infine il fattore comune:

$4x^3 + 2x^2 = 2x^2 \cdot (2x + 1)$

c. $5a(2x + y) - 3(2x + y)$.

In questo caso il fattore comune è il binomio $(2x+y)$. Lo raccogliamo e otteniamo:

$(2x+y)(5a-3)$

176 $2x-4y$; $\quad a^2-a$.

177 $-6a+8$; $\quad x^4-x^6$.

178 $4x-2$; $\quad 2b+4b^2$.

179 $16+8x$; $\quad y^3-y^2$.

180 x^2-2x; $\quad a^3-a^2-a$.

181 $2by^2-b^2$; $\quad 3x^2-6x+9x^4$.

182 xyz^2-xz; $\quad 27bcd-9b^2d$.

183 $x^2y^3-xy^2$; $\quad 3ab^2-6b$.

184 $a^2xy+aby^2+3ay$; $\quad 5x^2-10xy-15y^2$.

187 $\frac{27}{5}x^2y^3-\frac{3}{10}xy^2+\frac{9}{5}x^3$; $\quad \frac{1}{6}t^5-\frac{7}{3}t^2$.

188 $a^5-3a^3+5a^2-a$; $\quad \frac{1}{2}ax^2-\frac{3}{4}a^2x^4+\frac{1}{4}ax^3$.

189 $3x(a-c)-2(a-c)$; $\quad 5(x^2+1)-b(x^2+1)$.

190 $(a+b)^2+2(a+b)$; $\quad 5(x-7)-25(x-7)$.

191 $b(b-1)-2b+2$; $\quad 2(a-3)-(3-a)^2$.

192 $\frac{x-1}{3}+y(1-x)$; $\quad y(b-c)+7x(c-b)$.

193 $(2a-2)^2+(a-1)^2$; $\quad (3x+6y)^2-(x+2y)$.

194 $2a^n-a^{3n}$; $\quad b^{n+1}y-by$.

Scomponi i seguenti polinomi eseguendo raccoglimenti totali di opportuni polinomi

34 $3a(a+b)-x(a+b)$

35 $(2a+b)^2-(2a+b)$ $\quad [(2a+b)(2a+b-1)]$

36 $x(y+z)-2(y+z)$

37 $(a+1)(a^2+1)-(a-1)(a^2+1)$ $\quad [2(a^2+1)]$

38 $(x-1)(x+2)^2+(x-1)^2(x+2)$

39 $35(a+b)^5-7(a+b)^6$ $\quad [7(a+b)^5(5-a-b)]$

40 $a^4(b+1)+a^3(b+1)^2$

41 $2(a+1)x^2+6(a+1)^2x$ $\quad [2x(a+1)(x+3a+3)]$

42 $3a^2(a+b)-6a(a+b)^2+9(a+b)$

43 $2m^4(n+1)^4+4m^8(n+1)^5$ $\quad [2m^4(n+1)^4(1+2nm^4+2m^4)]$

44 $\frac{1}{2}m^{10}(m+2)^5-\frac{1}{4}m^5(m+2)^6-m^5(m+2)^5$