Scomposizione di polinomi

Linee guida per scomporre un polinomio

Dato un polinomio da scomporre:

1.RACCOGLIMENTO TOTALE: Raccogli il M.C.D. fra i termini del polinomio (se il polinomio è a coefficienti interi e il M.C.D. è diverso da 1).

$$\underbrace{3x^2y+2xy^2}_{\text{Il M.C.D. fra i termini è } xy} = \underbrace{xy(3x+2y)}_{\text{raccogliendo il fattore } xy}$$

2. Contiamo il numero dei termini e proviamo le strade riassunte nella tabella seguente.

SE IL POLINOMIO HA:	**PUÒ ESSERE RICONDUCIBILE A:**
due termini	• differenza di due quadrati • differenza di due cubi • somma di due cubi
tre termini	• quadrato di binomio • trinomio del tipo $x^2+(x_1+x_2)x + x_1 * x_2$
quattro termini	• cubo di binomio • raccoglimento parziale • differenza di due quadrati (se tre termini sono il quadrato di un binomio) $\underbrace{8a^3+12a^2+6a+1}_{\text{quadrinomio: è un cubo}}=(2a+1)^3$ $\underbrace{a^2+2ab+b^2-x^2}_{\text{quadrinomio}} = \underbrace{(a+b)^2-x^2}_{\text{differenza di due quadrati}}=(a+b-x)(a+b+x)$
Sei termini	• quadrato di un trinomio; • differenza dei quadrati di due binomi. $\underbrace{a^2+2ab+b^2-x^2-4xy-4y^2}_{\text{sei termini}}=\underbrace{(a+b)^2-(x+2y)^2}_{\text{differenza di due quadrati}}=$ $=(a+b+x+2y)(a+b-x-2y)$

3. Se il polinomio da scomporre non rientra nei casi precedenti, si può cercare di effettuare degli opportuni raccoglimenti parziali, che consentano poi di eseguire un raccoglimento totale, oppure di applicare il teorema e la regola di Ruffini.

4) Dopo aver trovato una scomposizione del polinomio, verifica se i fattori della scomposizione sono ulteriormente scomponibili, in modo da ottenere una scomposizione in fattori irriducibili

$$x^6 - y^6 = \underbrace{(x^3)^2 - (y^3)^2}_{\text{differenza di quadrati}} = \underbrace{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)}_{\text{differenza e somma di cubi}} =$$

$$= (x-y)\underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\text{irriducibile}}(x+y)\underbrace{(x^2 - xy + y^2)}_{\text{irriducibile}}$$

SCOMPOSIZIONE DI POLINOMI : VERIFICHIAMO LE NOSTRE CONOSCENZE

Vero o falso?

a) Il polinomio $2x(3x -y) +5$ è scomposto in fattori

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come **prodotto di polinomi** di grado minore o uguale a quello del polinomio dato. Siccome NON compaiono solo fattori, il quesito è FALSO

b) Il polinomio $2x^2 + 4x$ è irriducibile

Un polinomio si dice:

- **riducibile** quando è scomponibile in fattori, ciascuno dei quali di grado minore del grado del polinomio;
- **irriducibile,** quando NON è scomponibile in fattori, ciascuno dei quali di grado minore del grado del polinomio.

In questo caso, il polinomio dato si può scomporre in fattori, eseguendo un raccoglimento totale:

$$2x^2 + 4x = 2x(x +2)$$

il quesito è FALSO

c) nel polinomio $5x^2 +10x-20$ è possibile operare un raccoglimento totale di un numero.

Il quesito è VERO. Infatti possiamo raccogliere il M.C.D. dei coefficienti dei monomi presenti

M.C.D (5, 10, -20) = 5

Risulta:

$$5(x^2 +2x-4)$$

d) Il polinomio $2 x^4 -3x^3 + 2x^2 – 3x$ ammette quattro zeri

Sappiamo che si chiamano “ZERI” di un polinomio quei valori della x che lo rendono nullo. Di solito il numero massimo di zeri è proprio pari al grado del polinomio. Verifichiamo però che l’affermazione sia vera. Scomponiamo il polinomio in fattori:

$x (2 x^3 -3x^2 + 2x – 3) = x [x^2 (2x-3) + (2x-3)] = x (2x-3) (x^2+1)$

il polinomio ammette solo due zeri nel campo dei reali : $x = 0$ e $x = 3/2$

il quesito è quindi FALSO

e) $a^4 \mathbf{+ \; 2 a^2b} - 2bc+b^2+c^2+ 2 a^2c = (a^2-b+c)^2=(-a^2+b-c)^2$
V F

Verifichiamo che la scomposizione sia corretta

Si tratta dello sviluppo del quadrato di un trinomio. Calcoliamo le scomposizioni proposte e controlliamo che siano uguali a quella data

$(a^2-b+c)^2= a^4+ b^2+c^2$ $\mathbf{– 2 a^2b}$ … e già possiamo fermarci e rispondere che il quesito è FALSO.

f) Il polinomio $64\,x^6 - 1$ può essere scomposto sia come differenza di quadrati sia come differenza di cubi.
V F

Siccome $64 = 8^2$, risulta

$64\,x^6 - 1 = 8^2\,x^6 - 1 = (8\,x^3 + 1)\,(8\,x^3 - 1)$

Ma risulta anche

$8^2 = (2^3)^2 = 2^6 = (2^2)^3$

Di conseguenza:

$64\,x^6 - 1 = (2^2\,x^2)^3 - 1^3 = (4x^2 - 1)\,(16x^4 + 4x^2 + 1)$

Il quesito è quindi VERO

g) Il polinomio $8\,x^3 + 9\,x^2 - 24x - 27$ **non** è il cubo di un binomio.
V F

Verifichiamo: se è il cubo di un binomio, esso è il cubo di $(2x - 3)$. Calcolando

$(2x - 3)^3$ otteniamo

$(2x - 3)^3 = 8\,x^3 - 36\,x^2 + 54x - 27$

Quindi il quesito è VERO

h) $3^6 - 2^6$ è un numero divisibile per 5

Calcoliamo il valore che otteniamo applicando le regole di scomposizione. Scomponiamolo come differenza di due cubi:

$3^6 - 2^6 = (3^2 - 2^2)\,(3^4 + 36 + 2^4) = 5\,(81+36+16)$

Senza calcolare il prodotto, siccome 5 è un fattore, senza dubbio il numero che otterremo sarà divisibile per esso. Il quesito è quindi VERO

SCOMPONI IN FATTORI I SEGUENTI POLINOMI

2A) $4a^3 - 13a + 6$

Siccome non riconosco nessun prodotto notevole, provo a dividere il polinomio dato con la regola di Ruffini. Cerchiamo uno zero tra i divisori del termine noto e del coefficiente di grado massimo

$D(6) = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

$D(4) = \pm1, \pm2, \pm4$

i suoi eventuali zeri razionali sono da ricercare fra i numeri del tipo

$$\pm\frac{p}{q}$$

con

- **p** divisore del termine noto di P(x)
- **q** divisore del coefficiente del suo termine di grado massimo.

In questo caso abbiamo:

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 6\right\}$$

Calcoliamo

P(1) = -3 ≠ 0

P (-1) = -11

P (1/2) = 0 → ½ è uno zero del polinomio dato

P (-2) = -32 +26 +6 = 0 → -2 è uno zero del polinomio dato

Dividiamo quindi il polinomio dato per -2 e1/2

	4	**0**	**-13**	**+6**
-2		-8	+16	-6
	4	-8	+3	0

Otteniamo:

$4a^3$ -13a + 6 = (a+2) ($4a^2$-8a+3)

Il polinomio di secondo grado è ancora divisibile per ½

	4	**-8**	**+3**
½		+2	-3
	4	-6	0

Abbiamo quindi:

$4a^3$ -13a + 6 = (a+2) ($4a^2$-8a+3) = (a+2) (a-1/2) (4a-6)= $(a+2)\left(\frac{2a-1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}(2a-3) =$

$$= (a+2)(2a-1)(2a-3)$$

2B) $9a^2$ -6ab +12a+ b^2-4b+4

Il polinomio è formato da sei termini. Potrebbe trattarsi del quadrato di un trinomio. Compaiono in effetti tre quadrati:

$9a^2$, b^2 e 4

Verifichiamo facilmente che i tre termini rimanenti sono i doppi prodotti. Risulta perciò:

$9a^2$ -6ab +12a+ b^2-4b+4 = $(3a-b+2)^2$

3A) $\frac{9}{16}a^2 - ab^2 + \frac{4}{9}b^4$

Tre termini, di cui due quadrati. Verifichiamo facilmente che $-ab^2$ è il doppio prodotto delle basi. Risulta perciò:

$$\frac{9}{16}a^2 - ab^2 + \frac{4}{9}b^4 = (\frac{3}{4a} - \frac{2}{3}b^2)^2$$

3B)

$$\frac{256}{81}b^4 - 1 = \left(\frac{16}{9}b^2 + 1\right)\left(\frac{16}{9}b^2 - 1\right) = \left(\frac{16}{9}b^2 + 1\right)\left(\frac{4}{3}b + 1\right)\left(\frac{4}{3}b - 1\right)$$

4A) $\frac{1}{27}x^6 - x^4y^3 + 9x^2y^6 - 27y^9$

Quattro termini, di cui due cubi. Verifichiamo facilmente che i termini intermedi sono i tripli prodotti richiesti dalla regola. Risulta perciò:

$$\frac{1}{27}x^6 - x^4y^3 + 9x^2y^6 - 27y^9 = \left(\frac{1}{3}x^2 - 3y^3\right)^3$$

4B) $\frac{1}{81}x^4y^2 - 81y^2$

Notiamo subito che possiamo raccogliere y^2 tra i due termini e che, eseguito il raccoglimento, ci resta la differenza di due quadrati. Otteniamo

$$\frac{1}{81}x^4y^2 - 81y^2 = y^2\left(\frac{1}{81}x^4 - 81\right) = y^2\left(\frac{1}{9}x^2 + 9\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - 9\right)$$
$$= y^2\left(\frac{1}{9}x^2 + 9\right)\left(\frac{1}{3}x + 3\right)\left(\frac{1}{3}x - 3\right)$$

5) determina M.C.D. e m.c.m. tra i seguenti polinomi

$20x^4 - 45x^2y^2$

$6x^3 - 5x^2y - 6xy^2$

$4x^3 - 12x^2y + 9xy^2$

Per calcolare m.c.m. e M.C.D. dobbiamo scomporre in fattori irriducibili i polinomi

il massimo comune divisore è il prodotto dei fattori irriducibili comuni, presi una sola volta e con esponente minimo.

il minimo comune multiplo è il prodotto dei fattori irriducibili comuni e non comuni, presi una sola volta e con esponente massimo.

Scomponiamo quindi in fattori i tre polinomi dati:

$20x^4 - 45x^2y^2 = 5x^2(4x^2 - 9y^2) = 5x^2(2x-3y)(2x+3y)$

$6x^3 - 5x^2y - 6xy^2 = x\underbrace{(6x^2 - 5xy - 6y^2)} = x(3x+2y)(2x-3y)$

trinomio caratteristico non monico

$4x^3-12x^2y +9xy^2 = x(4x^2-12xy +9y^2) = x (2x-3y)^2$

M.C.D. = $x(2x-3y)$

m.c.m. = $5x^2 (2x-3y)^2 (2x+3y) (3x+2y)$

6) Barbara afferma che il numero $5^6- 1000$ è divisibile per 13. Ha ragione? Motiva la tua risposta

Dobbiamo scomporre il numero dato in fattori primi e verificare che tra essi compaia il 13.

Siccome $1000 = 10^3$, possiamo scomporre il numero dato come differenza tra due cubi:

$5^6- 1000 = (5^2)^3- 10^3 = (25-10) (25^2 + 25 \times 10 + 10^2) = 15 (625+250+100) = 15 \cdot 975 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13$

Siccome il fattore 13 compare tra i divisori del numero ottenuto, allora il numero dato è divisibile per 13.

Determina le misure delle diagonali di un rombo, sapendo che sono espresse da polinomi a coefficienti interi e che l'area del rombo è:

$$\frac{1}{2}[(x-1)(x^2 -3x-4)-(x+1)(x^2 -6x+8)]$$

L'area del rombo si calcola come semiprodotto delle diagonali. Dobbiamo quindi cercare di scomporre il polinomio dato e trovare i fattori da cui ha avuto origine. La tentazione di procedere immediatamente con la scomposizione è forte. Infatti

$$(x^2 -3x-4) = trinomio\ caratteristico = (x-4)(x-1)$$

$$(x^2 -6x+8) = trinomio\ caratteristico = (x-4)(x-2)$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}[(x-1)^2(x^2 -3x-4)-(x+1)(x^2 -6x+8)]$$
$$= \frac{1}{2}\ [(x+1)\ (x-1)(x-4)-(x+1)(x-2)(x-4)]$$

Possiamo raccogliere il fattore comune (x-4) ma non andiamo molto lontano.

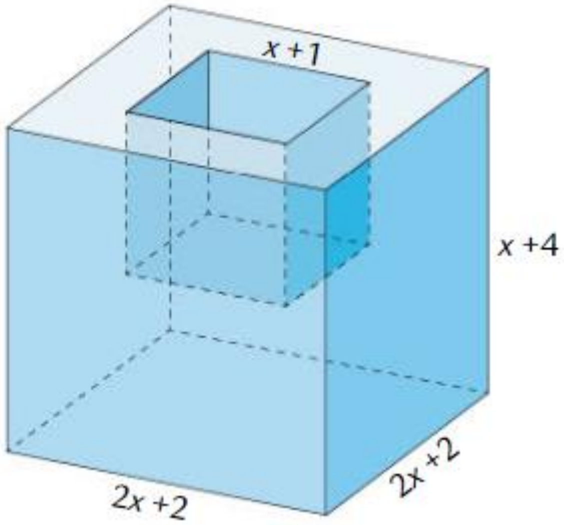
Trascurando il fattore 1/2 , eseguiamo le operazioni tra parentesi quadre. Otteniamo:

$(x^3 -3x^2-4x-x^2+3x+4) – (x^3 -6x^2+8x + x^2-6x+8) = x^3 -3x^2-4x-x^2+3x+4- x^3 +6x^2 -8x - x^2+6x-8 = x^2 -3x-4 = (x-4) (x+1)$

Le diagonali sono quindi

x-4 e x+1

In figura è rappresentata una fioriera costituita da un parallelepipedo rettangolo a base quadrata, in cui è stata praticata una cavità cubica per contenere il terriccio. Il volume della fioriera (priva di terriccio) è uguale a quello di un altro parallelepipedo rettangolo, avente base quadrata il cui lato misura (x+ 1). Quanto misura l'altezza di quest'ultimo?



Calcoliamo il volume della fioriera, pari alla differenza tra il volume del parallelepipedo e il volume del foro di forma cubica.

Il volume del parallelepipedo misura

V_P = Ab x h = $(2x+2)^2$ $(x+4)$ = 4 $(x+1)^2$ $(x+4)$

Per il volume del cubo invece

V_C = l^3 = $(x+)^3$

Abbiamo perciò

V_F = V = V_P – V_C= 4 $(x+1)^2$ $(x+4)$ - $(x+)^3$ = $(x+1)^2$ [4(x+4) –(x+1)] = $(x+1)^2$ (3x+15)

Per il parallelepipedo di altezza sconosciuta risulta

V = Ab x h = $(x+1)^2$ h

Uguagliando le due espressioni otteniamo:

$(x+1)^2$ (3x+15) = $(x+1)^2$ h

Ovvero

h = 3x +15