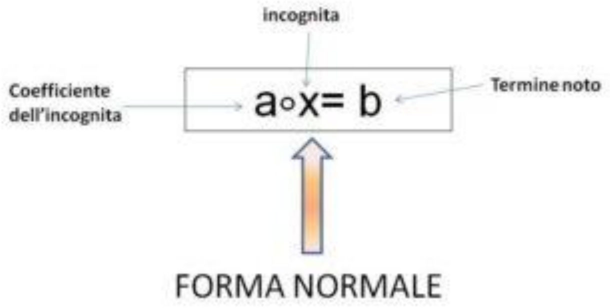
LE EQUAZIONI LETTERALI : che cosa sono

Ricordate che cos'è un'equazione?

Un'**equazione** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali per la quale ci chiediamo se esistono valori che, sostituiti a una o più lettere, la rendono vera



Le equazioni **letterali** sono equazioni in cui, oltre all'incognita, compaiono anche altre lettere, dette **parametri**, che sono valori reali costanti.

Le soluzioni dell'equazione dipendono dal valore che assumono i coefficienti letterali dell'incognita. La risoluzione prende il nome di **discussione** in quanto è necessario discutere i valori che assumono i parametri per determinare l'insieme delle soluzioni.

Le equazioni letterali presentano una o più lettere oltre all'incognita

Vediamo ora come si procede per la risoluzione di queste equazioni, nel caso in cui siano intere oppure frazionarie

Risolvere un'equazione letterale intera

Data un'equazione letterale di primo grado, non dobbiamo soltanto risolverla ma bisogna anche discuterla, cioè studiare, al variare dei parametri, quando l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile.

Nella soluzione delle equazioni letterali intere è necessario discutere per quali valori delle lettere presenti l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile

Iniziamo con le equazioni letterali INTERE, in cui l'incognita compare solo al numeratore

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione, nell'incognita x:

$$ax - 3a = 2x.$$

- Portiamo al primo membro i termini con l'incognita e al secondo gli altri, riconducendo così l'equazione alla sua forma normale

$$ax - 2x = 3a.$$

- Raccogliamo ora la x:

$$(a-2)x = 3a.$$

- **Discussione**

PRIMA di dividere i due membri per (a -2) dobbiamo porre la condizione:

$a - 2 \neq 0$, ossia $\boldsymbol{a \neq 2}$.

Se questa condizione è verificata, possiamo dividere i due membri per a - 2. In tal caso l’equazione è determinata e la soluzione è:

$$x = \frac{3a}{a-2}$$

Dobbiamo ora analizzare il caso $\boldsymbol{a = 2}$.

Sostituiamo 2 ad a nell’equazione

$(a-2)x = 3a$.

Troviamo:

$0x = 3 \circ 2 \rightarrow 0x = 6 \rightarrow$ l’equazione è **impossibile**.

In sintesi:

- se $a \neq 2$, l’equazione è determinata e la soluzione è
- se $a = 2$, l’equazione è impossibile

IN SINTESI : PROCEDIMENTO PER LA DISCUSSIONE DI UN’EQUAZIONE LETTERALE INTERA DI PRIMO GRADO NELL’INCOGNITA x

PASSO 1: Se necessario, riportiamo l’equazione alla forma normale $Ax = B$

PASSO 2 : Risolviamo l’equazione ottenuta e la discutiamo.

- Determiniamo i valori dei parametri per cui $A \neq 0$: per tutti questi valori l’equazione è DETERMINATA e ne calcoliamo la soluzione
- Esaminiamo le equazioni che si ottengono per $A = 0$. Per questi valori, l’equazione è IMPOSSIBILE oppure INDETERMINATA

PASSO 3 : riassumiamo le conclusioni ottenute al passo precedente

ESEMPIO 2
Risolviamo e discutiamo l’equazione nell’incognita x:

$a^2x + 1 = a(x + 1)$

▶ 1° passo Riconduciamo l'equazione alla forma $Ax = B$ e scomponiamo A e B.

$a^2x + 1 = a(x + 1)$ Equazione data

$a^2x + 1 = ax + a$ Svolgendo la moltiplicazione al 2° membro

$a^2x - ax = a - 1$ Trasportando al 1° membro tutti i termini con la x e al 2° membro gli altri

$(a^2 - a)x = a - 1$ Raccogliendo x: il raccoglimento di x è essenziale per svolgere i passaggi successivi

$a(a - 1)x = a - 1$ Scomponendo in fattori il coefficiente di x (il termine noto non è scomponibile)

▶ 2° passo Risolviamo e discutiamo l'equazione ottenuta.

- Il coefficiente di x, per la legge di annullamento del prodotto, è diverso da zero se $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Se è verificata questa condizione, in base al 2° principio di equivalenza possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione $a(a-1)x = a - 1$ per $a(a-1)$; otteniamo così la soluzione:

$$x = \frac{\cancel{a-1}}{a\,\cancel{(a-1)}} = \frac{1}{a}$$

Analizziamo ora che cosa accade nei casi esclusi, cioè se $a = 0$ o $a = 1$.

- Se $a = 0$, l'equazione $a(a-1)x = a - 1$ diventa $0 \cdot (0-1)x = 0 - 1$, cioè $0 \cdot x = -1$, che è impossibile.
- Se $a = 1$, l'equazione $a(a-1)x = a - 1$ diventa $1 \cdot (1-1)x = 1 - 1$, cioè $0 \cdot x = 0$, che è indeterminata (è un'identità).

▶ 3° passo Riassumiamo i risultati della discussione.

Se $a \neq 0 \wedge a \neq 1$, l'equazione è determinata e la soluzione è $x = \frac{1}{a}$.

Se $a = 0$, l'equazione è impossibile.

Se $a = 1$, l'equazione è indeterminata (è un'identità).

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE LETTERALE FRATTA

Vediamo ora come dobbiamo procedere nel caso di un'equazione letterale in cui compaiono incognite e/o parametri ai denominatori.

Anche nella soluzione delle equazioni letterali fratte è necessaria la discussione.

ESEMPIO

Risolviamo la seguente equazione, nell'incognita *x*:

$$\frac{a+1}{ax-a} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{a+1}{a(x-1)} = \frac{1}{2a}$$

Dobbiamo innanzitutto imporre che i denominatori siano non nulli (condizioni di esistenza):

- $a(x-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \wedge x \neq 1$
- $2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

Calcoliamo quindi il minimo comune multiplo dei denominatori (m.c.d.) :

$$\frac{2(a+1)}{2a(x-1)} = \frac{(x-1)}{2a(x-1)}$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per il m.c.d., otteniamo un'equazione intera:

$$2a+2 = x - 1$$

Ovvero, riportando al primo membro il termine con la x e al secondo tutti gli altri:

$$x = 2a + 3$$

Per le condizioni di esistenza deve essere $x \neq 1$ ovvero

$$2a + 3 \neq 1 \Rightarrow a \neq -1$$

Per *a* = -1, l'equazione è impossibile.

RICAPITOLANDO

- se $a = 0$, l'equazione perde di significato;
- se $a = -1$, l'equazione è impossibile;
- se $a \neq 0 \wedge a \neq -1$, l'equazione è determinata e la soluzione è $x=2a+3$

IN SINTESI PROCEDIMENTO PER LA DISCUSSIONE DI UN'EQUAZIONE LETTERALE CON INCOGNITE E/O PARAMETRI AL DENOMINATORE

PASSO 1 : Se l'equazione letterale è frazionaria oppure contiene parametri anche al denominatore, dobbiamo innanzi tutto porre le CONDIZIONI DI ESISTENZA delle frazioni algebriche presenti. Esse sono di due tipi

- condizioni sui parametri: escludono i valori per cui l'equazione perde significato
- condizioni sulle incognite: vanno poi riprese alla fine per verificare l'accettabilità delle soluzioni

PASSO 2 : Dobbiamo ora ricondurre l'equazione alla forma INTERA, moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori. Risolviamo poi e discutiamo l'eguazione ottenuta
PASSO 3 : Se al passo 1 abbiamo posto delle condizioni sulle incognite, dobbiamo discutere L'ACCETTABILITÀ delle soluzioni in relazione a tali condizioni
PASSO 4: riassumiamo i risultati ottenuti

ESEMPIO Discussione di un'equazione letterale frazionari
Vogliamo risolvere la seguente equazione nell'incognita x:

$$\frac{x}{ax-a}+\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{a}$$

1) Poniamo le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche presenti:

Riscriviamo perciò l'equazione, scomponendo i denominatori al PRIMO MEMBRO:

$$\frac{x}{a(x-1)}+\frac{x}{x-1}=-\frac{1}{a}$$

Poniamo le condizioni di esistenza:
a (x-1) ≠ 0
da cui

- a≠ 0 (condizione sul parametro) : per a = 0 l'equazione PERDE di significato
- x -1≠ 0 → x ≠ 1 (condizione sull'incognita) : dovremo riprenderla dopo aver risolto l'equazione, per discutere l'accettabilità delle soluzioni

PASSO 2: Dobbiamo ricondurre l'equazione data ad una intera, calcolando il m.c.m. dei denominatori, che è

a(x-1)

Otteniamo :

$$\frac{x+ax}{\cancel{a(x-1)}}=-\frac{x-1}{\cancel{a(x-1)}}$$

Ovvero:
x + ax = -x+1
Portiamo ora al primo membro i termini contenenti l'incognita, cambiando loro il segno
x + ax + x = 1
Sommando i termini simili e raccogliendo la x otteniamo:
x (a +2) = 1

Se a+2 ≠ 0 ovvero a ≠ -2, la soluzione risulta :

$$x=\frac{1}{a+2}$$

Se invece a = 2, l'equazione diventa
0x = 1 IMPOSSIBILE
PASSO 3: dobbiamo verificare che la soluzione ottenuta soddisfi le condizioni poste al PASSO 1.
Dalle condizioni di esistenza dell'incognita sappiamo che deve essere x ≠ 1. Tale soluzione è quindi accettabile se risulta

$$\frac{1}{a+2}\neq 1$$

Ovvero se
a + 2 ≠ 1 → a ≠ -1
Se a = 1, la soluzione non è ammissibile per cui anche in questo caso l'equazione risulta IMPOSSIBILE
PASSO 4 : riassumiamo i risultati ottenuti

a= 0 : l'equazione perde significato
a = -2 ˅ a= -1 l'equazione è IMPOSSIBILE
a≠ - 2 ˄ a≠-1˄ a ≠ 0 : la soluzione dell'equazione è

$$x=\frac{1}{a+2}$$

Procedimento per risolvere e discutere un'equazione letterale

Metodo generale per risolvere e discutere le equazioni letterali.

ESEMPIO

Risolviamo e discutiamo l'equazione $\frac{x}{ax+a}+\frac{2}{a}=\frac{1-x}{1+x}$.

Le C.E. sono $a \neq 0$ e $x+1 \neq 0$

cioè $a \neq 0$ e $x \neq -1$.

Per $a=0$ l'equazione perde di significato.

Poni le C.E. delle frazioni algebriche che compaiono nell'equazione. Le condizioni sui parametri escludono i valori per cui l'equazione perde di significato.
Le condizioni sulle incognite ti serviranno a verificare l'accettabilità delle soluzioni.

$$a(x+1)\left[\frac{x}{a(x+1)}+\frac{2}{a}\right]=a(x+1)\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$x+2x+2=-ax+a \Rightarrow (a+3)x=a-2$$

Riconduci l'equazione a un'equazione intera, risolvila e discuti l'equazione ottenuta.

Se $a \neq -3$, $x=\frac{a-2}{a+3}$.

Se $a=-3$ l'equazione è impossibile.

$x=\frac{a-2}{a+3}$ è accettabile se $x \neq -1$

$$\frac{a-2}{a+3} \neq -1 \Rightarrow a-2 \neq -a-3 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2}$$

Confronta la soluzione trovata con le C.E. per stabilire se è accettabile.

Se $a=-\frac{1}{2}$ l'equazione è impossibile.

In conclusione:

Riassumi i risultati ottenuti

se $a=0$ l'equazione **perde di significato**;

se $a=-3$ o $a=-\frac{1}{2}$ l'equazione è **impossibile**;

se $a \neq -3$ e $a \neq -\frac{1}{2}$ e $a \neq 0$ l'equazione è **determinata** e **ha** come **soluzione** $x=\frac{a-2}{a+3}$.

Equazioni letterali e formule
In matematica e, più in generale, in molte altre discipline scientifiche (fisica,chimica, economia ecc.) capita spesso di incontrare delle formule, espresse sotto forma di uguaglianze, che esprimono relazioni tra grandezze rappresentate da variabili. Si pone di frequente il problema di esprimere una grandezza in funzione delle altre. A tale scopo può essere utile interpretare le formule come equazioni letterali in cui si considera come incognita la variabile che rappresenta la grandezza che si vuole esprimere

EQUAZIONI LETTERALI INTERE: altri esempi

Risolviamo la seguente equazione:

$$ax+4 = x + 4a^2$$

Riportiamoci alla forma normale:

$$ax-x = 4a^2 - 4$$

Raccogliamo la x al primo membro e il 4 al secondo membro, ottenendo:

$$x(a-1) = 4(a^2 - 1)$$

Se a-1 ≠ 0, la soluzione diventa

$x = \frac{4(a^2-1)}{a-1} = \frac{4(a-1)(a+1)}{a-1} = 4(a+1), \ a \neq 1$

Se invece a = 1, provando a sostituire questo valore nell'equazione in forma normale, otteniamo:

x (1-1) = 4(1 -1) ⇨ 0 x = 0 EQUAZIONE INDETERMINATA

Riassumendo :

a ≠1⇨ equazione determinata : $x = 4(a+1)$

a= 1 ⇨ equazione indeterminata

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali

- ax = x+a (a ≠1 x =a/(a-1) // a = 1 imposs)
- 6x -3 (x + 2a) = a+4(x-2a) [x=a]
- 2x -4(3x-a) = 6(a-2x) + 6a [x=4a]
- $(a^2-3a)x = a(a^2-9)$ (a ≠0 ∧ a ≠ 3 : x = a + 3 ; a = 0, a = 3 : indet)
- $a(5-4x) = 4 + a^2(1-x)$ (a ≠0 ∧ a ≠ 4 : x = (a -1)/a ; a = 0 : imposs; a = 4 : indet)
- 2[3 + (a+3)x] + 2ax = 3-3(2x-1) (a ≠ -3 : x = 0 ; a = -3 : indet)

EQUAZIONI LETTERALI FRATTE : ESEMPIO

$$\frac{2x-1}{3a} + \frac{x}{3} = \frac{2}{a}$$

CONDIZIONI DI ESISTENZA :

a ≠0

⇨

$$\frac{2x-1+ax}{3a} = \frac{6}{3a}$$

2x + ax = 7

Raccogliendo la x al primo membro otteniamo:

$$x(a+2) = 7$$

Se a+2 ≠ 0 ovvero a ≠ -2 la soluzione diventa:

$$x = 7/(a+2)$$

Se a+2 = 0 : sostituiamo a= -2 nell'equazione in forma normale :

(-2+2) x = 7 : impossibile

$$\begin{cases} a = 0 : equazione\ senza\ significato \\ a = -2 : impossibile \\ a \neq 0 \bigwedge a \neq -2 : x = \dfrac{7}{a+2} \end{cases}$$

Risolvi la seguente equazione letterale, in cui il parametro compare al denominatore

$$\frac{x}{a-3} + \frac{a+3}{(a-3)^2} = (2-a)(a+2) + a^2 - 3 \qquad [a \neq 3 : x = \frac{(a-1)(a-6)}{a-3}$$

EQUAZIONI LETTERALI ESERCIZI

104 **ESERCIZIO SVOLTO**

Risolviamo e discutiamo l'equazione:

$(a-2)x = 2a^2 - 8$

Se $a - 2 \neq 0$, cioè se $a \neq 2$, possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione per $(a-2)$ e otteniamo che:

$$x = \frac{2a^2-8}{a-2} = \frac{2(a^2-4)}{a-2} =$$

$$= \frac{2\cancel{(a-2)}(a+2)}{\cancel{a-2}} = 2(a+2)$$

- Esaminiamo ora che cosa accade se $a = 2$. Quando $a = 2$ l'equazione $(a-2)x = 2a^2 - 8$ diventa:

  $(2-2)x = 2 \cdot 2^2 - 8$

  ossia: $0 \cdot x = 0$

  che è indeterminata (è un'identità).

Riassumendo:

- se $a \neq 2$, allora $x = 2(a+2)$;
- se $a = 2$, allora l'equazione è indeterminata.

105 **ESERCIZIO GUIDATO**

Risolvi e discuti l'equazione:

$(6b+6)x = 2b - 2$

- L'equazione data si può riscrivere nella forma:

  $6(b+1)x = 2(b-1)$

- Se $b + 1 \neq 0$, cioè se $b \neq$ ...., puoi dividere entrambi i membri dell'equazione per $6(b+1)$; ottieni così che:

  $$x = \frac{2(\ldots\ldots)}{6(\ldots\ldots)} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$$

- Se $b = -1$, l'equazione diventa

  $(-6+6)x =$ ....

  cioè $0 \cdot x =$ .....

  che è ....

In definitiva:

- se $b \neq$ ....., l'equazione è determinata e la sua soluzione è ....
- se $b = -1$, l'equazione è ....

106 **ESERCIZIO GUIDATO**

Risolvi e discuti l'equazione $(a^2 - 2a)x = a^2 + 3a$.

- L'equazione data si può riscrivere nella forma:

  $a(\ldots\ldots)x = a(\ldots\ldots)$

- Se $a^2 - 2a \neq 0$, cioè se $a \neq$ .... e $a \neq$ ...., puoi dividere entrambi i membri dell'equazione per $a^2 - 2a$; ottieni così che:

  $$x = \frac{a(\ldots\ldots)}{a(\ldots\ldots)} = \frac{a + \ldots}{a - \ldots}$$

- Se $a = 0$, l'equazione diventa $0 \cdot x =$ ....., che è ....
- Se $a =$ ....., l'equazione diventa $0 \cdot x =$ ....., che è ....

In definitiva:

- se $a \neq$ .... e $a \neq$ ...., l'equazione è determinata e la sua soluzione è ....
- se $a = 0$, l'equazione è ....
- se $a =$ ....., l'equazione è ....

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x.

107 $(b-1)x = b$ $\left[\text{Se } b \neq 1,\ x = \frac{b}{b-1};\ \text{se } b = 1, \text{ impossibile}\right]$

108 $(k+1)x = k^2 + k$ $[\text{Se } k \neq -1,\ x = k;\ \text{se } k = -1, \text{ indeterminata}]$

109 $(2a-1)x = 2a + 1$ $\left[\text{Se } a \neq \frac{1}{2},\ x = \frac{2a+1}{2a-1};\ \text{se } a = \frac{1}{2}, \text{ impossibile}\right]$

115 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo e discutiamo l'equazione $ax + 4 = 2x + 2a$.

- **Riconduciamo l'equazione alla forma $Ax = B$**

  $ax + 4 = 2x + 2a$

  $ax - 2x = 2a - 4$

  $(a - 2)x = 2a - 4$

- **Risolviamo e discutiamo l'equazione ottenuta**

  Se $a - 2 \neq 0$, cioè se $a \neq 2$, possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione ottenuta per $(a - 2)$ e otteniamo la soluzione:

  $$x = \frac{2a-4}{a-2} = \frac{2(a-2)}{a-2} = 2$$

  Se $a = 2$, l'equazione $(a - 2)x = 2a - 4$ diventa:

  $(2 - 2)x = 2 \cdot 2 - 4$ ossia: $0 \cdot x = 0$

  che è un'equazione indeterminata, verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- **Riassumiamo**

  Se $a \neq 2$, allora $x = 2$; se invece $a = 2$, l'equazione è indeterminata.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x.

116 $ax - a = a^2$ [Se $a \neq 0$, $x = a + 1$; se $a = 0$, indeterminata]

117 $a(x - 1) + x(a - 1) = 1 - a$ $\left[\text{Se } a \neq \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2a-1}; \text{ se } a = \frac{1}{2}, \text{ impossibile}\right]$

118 $2(a + 1)x - (a - 1)x = x$ [Se $a \neq -2$, $x = 0$; se $a = -2$, indeterminata]

119 $(x - a)^2 - (x - 2a)^2 = (1 + 2a)^2 - 3a^2 - 4a - 1$ [Se $a \neq 0$, $x = 2a$; se $a = 0$, indeterminata]

120 $(x - 2)^2 + x(x + 1) = a(x - 2) + 2x(x + 3)$ $\left[\text{Se } a \neq -9, x = \frac{2(a+2)}{a+9}; \text{ se } a = -9, \text{ impossibile}\right]$

121 $x(x + k) - 2(x + k)(x - k) = 1 - x^2 - (k + 1)x - 2k^2$ $\left[\text{Se } k \neq -\frac{1}{2}, x = 1 - 2k; \text{ se } k = -\frac{1}{2}, \text{ indeterminata}\right]$

122 $(a + 1)x - (x - 1)a = a(x + 1) + a^2 - 1$ [Se $a \neq 1$, $x = -a - 1$; se $a = 1$, indeterminata]

123 $x + \frac{1}{2}a = x(a + 1) + \frac{1}{2}(x + 1)$ $\left[\text{Se } a \neq -\frac{1}{2}, x = \frac{a-1}{2a+1}; \text{ se } a = -\frac{1}{2}, \text{ impossibile}\right]$

125 $\frac{x-k}{2} + \frac{k}{3} = kx$ $\left[\text{Se } k \neq \frac{1}{2}, x = \frac{k}{3(1-2k)}; \text{ se } k = \frac{1}{2}, \text{ impossibile}\right]$

126 $\left(t - \frac{1}{2}x\right)\left(-t - \frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x - t\right)\left(3t - \frac{1}{2}x\right) = x - 1$ $\left[\text{Se } t \neq \frac{1}{2}, x = 2t + 1; \text{ se } t = \frac{1}{2}, \text{ indeterminata}\right]$

127 $(x + m)^2(x - m)^2 + (m^2 - 2)(-m^2 + 2) = x^2(x^2 - 2m^2) + 4x(m - 1)$ [Se $m \neq 1$, $x = m + 1$; se $m = 1$, indeterminata]

128 $\frac{(x+a+1)^2}{2} - \frac{(a+x)^2}{3} = \frac{1+x^2}{6}$ $\left[\text{Se } a \neq -3, x = -\frac{a^2+6a+2}{2(a+3)}; \text{ se } a = -3, \text{ impossibile}\right]$

129 $(x + t)^3 - x^3 = 3t(x + 1)^2$ $\left[\text{Se } t \neq 0 \wedge t \neq 2, x = \frac{3-t^2}{3(t-2)}; \text{ se } t = 0, \text{ indeterminata; se } t = 2, \text{ impossibile}\right]$

La discussione di un'equazione letterale intera con parametri al denominatore

149 ESERCIZIO GUIDATO

Risolvi e discuti l'equazione $\frac{x}{a-1}+x=2a$.

- Poni anzitutto la condizione di esistenza:

  $a-1\neq 0$, cioè $a\neq$ ....

- Se $a\neq$ ....., puoi moltiplicare entrambi i membri per $(a-1)$; ottieni così l'equazione equivalente

  $x+x(a-1)=2a($..............$)$

ossia:

$a\cdot x=$ .... [*]

- Se $a\neq 0$, l'equazione [*] è determinata e ha come soluzione $x=$ ....
- Se invece $a=0$, l'equazione [*] diventa $0\cdot x=$ ...., che è un'equazione ....

In conclusione:

- se $a\neq 0\wedge a\neq 1$, l'equazione è determinata e ha come soluzione $x=$ ....
- se $a=0$, l'equazione è ....
- se $a=$ ...., l'equazione perde significato.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali intere nell'incognita x.

150 $\frac{x}{a}+\frac{1}{2}a=2x-\frac{3}{2}a+2(1-a)$ $\left[\text{Se } a\neq 0\wedge a\neq\frac{1}{2}, x=2a; \text{ se } a=0, \text{ perde significato; se } a=\frac{1}{2}, \text{ indeterminata}\right]$

151 $\frac{x}{a}+\frac{1}{2}(x-a)=\frac{3}{4}(x-2)$ $\left[\text{Se } a\neq 0\wedge a\neq 4, x=\frac{2a(a-3)}{4-a}; \text{ se } a=0, \text{ perde significato; se } a=4, \text{ impossibile}\right]$

152 **Videolezione** $\frac{x}{k}+\frac{x+1}{k+1}=2$

$\left[\text{Se } k\neq -1\wedge k\neq 0\wedge k\neq -\frac{1}{2}, x=k; \text{ se } k=-1\vee k=0, \text{ perde significato; se } k=-\frac{1}{2}, \text{ indeterminata}\right]$

153 $\frac{2}{a^2-1}-\frac{x+1}{a-1}=\frac{x-1}{a+1}+\frac{2a}{a^2-1}$

$[\text{Se } a\neq\pm 1\wedge a\neq 0, x=-1; \text{ se } a=\pm 1, \text{ perde significato; se } a=0, \text{ indeterminata}]$

154 $\frac{kx+1}{k^3-2k^2+k}=\frac{x}{k^2-k}-\frac{1}{k^3-k^2}$ $\left[\text{Se } k\neq 0\wedge k\neq 1, x=\frac{1-2k}{k}; \text{ se } k=0\vee k=1, \text{ perde significato}\right]$

155 $\frac{1}{a^2-1}-\frac{2x+1}{a-1}=\frac{2x-1}{a+1}+\frac{a}{a^2-1}$

$\left[\text{Se } a\neq\pm 1\wedge a\neq 0, x=-\frac{a+1}{4a}; \text{ se } a=\pm 1, \text{ perde significato; se } a=0, \text{ impossibile}\right]$

156 $\frac{x-1}{k^2-1}+\frac{k-x}{k^2+k-2}=\frac{2}{k^2+3k+2}$ $[\text{Se } k\neq -2\wedge k\neq\pm 1, x=k(2-k); \text{ se } k=-2\vee k=\pm 1, \text{ perde significato}]$

157 $\frac{x}{2k^2-2}+\frac{1-2x}{k^2-k-2}=\frac{1}{k^2-3k+2}$

$\left[\text{Se } k\neq\pm 1\wedge k\neq 2\wedge k\neq\frac{2}{3}, x=\frac{4}{2-3k}; \text{ se } k=\pm 1\vee k=2, \text{ perde significato; se } k=\frac{2}{3}, \text{ impossibile}\right]$

158 $\frac{(x-2)^2-x^2}{k^2-2k}-\frac{x}{k^2-4k+4}=-\frac{1}{k}$

$\left[\text{Se } k\neq 0\wedge k\neq 2\wedge k\neq\frac{8}{5}, x=\frac{k^2-4}{5k-8}; \text{ se } k=0\vee k=2, \text{ perde significato; se } k=\frac{8}{5}, \text{ impossibile}\right]$

159 $\left(\frac{xm+x}{m^2-2m}\right):\frac{m^2-1}{m^2-4}+\frac{x}{m}=\frac{1}{m-1}$ $\left[\text{Se } m\neq\pm 1\wedge m\neq 0\wedge m\neq\pm 2\wedge m\neq -\frac{1}{2}, x=\frac{m}{2m+1};\right.$

$\left.\text{se } m=\pm 1\vee m=0\vee m=\pm 2, \text{ perde significato; se } m=-\frac{1}{2}, \text{ impossibile}\right]$

La discussione di un'equazione letterale frazionaria

182 **ESERCIZIO GUIDATO**

Risolvi e discuti l'equazione $\frac{a}{x-1}+\frac{1}{2}=\frac{2-ax}{2x-2}$.

- **Poni le condizioni di esistenza (C.E.)**

Scomponi i denominatori dell'equazione:

$$\frac{a}{x-1}+\frac{1}{2}=\frac{2-ax}{2(\ldots\ldots)}$$

Le frazioni che compaiono nell'equazione sono definite purché sia $x-1\neq 0$, cioè per $x\neq 1$.

- **Moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori e svolgendo i calcoli, riconduci l'equazione alla forma $Ax=B$**

Ottieni l'equazione:

$$(a+1)x=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se $a+1\neq 0$, cioè se $a\neq$ ...., questa equazione ha come soluzione $x=\frac{\ldots\ldots}{a+1}$.

Se invece $a=$ ...., l'equazione diventa $0\cdot x=$ ....., che è ....

- **Confronta la soluzione trovata con le C.E.**

La soluzione dell'equazione ottenuta è accettabile solo se soddisfa le condizioni di esistenza dell'equazione assegnata, cioè se è diversa da 1.

$$\frac{\ldots\ldots}{a+1}\neq 1 \quad\Rightarrow\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\neq a+1 \quad\Rightarrow\quad 3a\neq\ldots\ldots\ldots \quad\Rightarrow\quad a\neq\frac{\ldots\ldots}{3}$$

Quindi, se $a\neq\frac{\ldots\ldots}{3}$, la soluzione trovata è accettabile; se invece $a=\frac{\ldots\ldots}{3}$ la soluzione è da scartare e l'equazione è impossibile.

- **Riassumi i risultati della discussione**

Se $a\neq$ .... e $a\neq$ ...., allora l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x=\frac{\ldots\ldots}{a+1}$.

Se $a=$ ..... o $a=$ ....., allora l'equazione è impossibile.

Risolvi e discuti le seguenti equazioni letterali frazionarie nell'incognita x.

183 Videolezione $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{2a-x}{x^2-a^2}$ $\left[\text{Se } a\neq 0,\ x=\frac{2}{3}a;\ \text{se } a=0, \text{ impossibile}\right]$

184 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{ax}{x^2-4}$ $[\text{Se } a\neq 2,\ x=0;\ \text{se } a=2, \text{ indeterminata}]$

185 $\frac{1}{x}+\frac{3}{2x-2}=\frac{a}{4x^2-4x}$ $\left[\text{Se } a\neq -4\wedge a\neq 6,\ x=\frac{a+4}{10};\ \text{se } a=-4\vee a=6, \text{ impossibile}\right]$

186 $\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x+a}=\frac{3a}{x^2-a^2}$ $\left[\text{Se } a\neq 0,\ x=\frac{4}{3}a;\ \text{se } a=0, \text{ impossibile}\right]$

187 $\frac{x}{x^2-m^2}+\frac{1}{2x+2m}=\frac{1}{m-x}$ $\left[\text{Se } m\neq 0,\ x=-\frac{m}{5};\ \text{se } m=0, \text{ impossibile}\right]$

188 $\frac{a}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{2}{x^2+x}$ $\left[\text{Se } a\neq -2\wedge a\neq 1\wedge a\neq 4,\ x=\frac{3}{1-a};\ \text{altrimenti l'equazione è impossibile}\right]$

189 Videolezione $\frac{1}{x+t}+\frac{2}{3x+3t}=-\frac{5}{6t-3}$ $\left[\text{Se } t\neq\frac{1}{2},\ x=1-3t;\ \text{se } t=\frac{1}{2}, \text{ perde significato}\right]$

190 $\frac{1}{x^2-1}+\frac{a}{x^2-x}=\frac{2}{x^2+x}$ $\left[\text{Se } a\neq -2\wedge a\neq -\frac{1}{2}\wedge a\neq 1,\ x=\frac{a+2}{1-a};\ \text{altrimenti l'equazione è impossibile}\right]$

191 $\frac{x}{x^2-a^2}+\frac{2}{x^2+2ax+a^2}=\frac{1}{x-a}$ $\left[\text{Se } a\neq 0\wedge a\neq 2,\ x=\frac{a(a+2)}{2-a};\ \text{se } a=0\vee a=2, \text{ impossibile}\right]$

192 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x-2}=\frac{ax+1}{x^2-x}$ $\left[\text{Se } a\neq -\frac{1}{2}\wedge a\neq\frac{3}{2},\ x=\frac{4}{3-2a};\ \text{altrimenti l'equazione è impossibile}\right]$

Equazioni letterali e formule

Risolvi le seguenti formule rispetto alla variabile indicata a fianco.

219 $F = -\frac{mg}{l}$ m $\left[m = -\frac{Fl}{g}\right]$

220 $s = s_0 + vt$ v $\left[v = \frac{s - s_0}{t}\right]$

221 $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$ Q_1 $\left[Q_1 = \frac{Fr^2}{kQ_2}\right]$

222 $L = q(V_A - V_B)$ V_B $\left[V_B = V_A - \frac{L}{q}\right]$

223 $T^2 = \frac{4\pi^2 l}{g}$ l $\left[l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}\right]$

224 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ω $\left[\omega = \frac{2\pi}{T}\right]$

225 $C = C_0(1 + it)$ i $\left[i = \frac{C - C_0}{tC_0}\right]$

226 $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ a $\left[a = \frac{2(s - s_0 - vt)}{t^2}\right]$

227 $f = \frac{pq}{p + q}$ p $\left[p = \frac{fq}{q - f}\right]$

228 $V = \pi r^2 h$ h $\left[h = \frac{V}{\pi r^2}\right]$

229 $x - 2y + 1 = 0$ x $[x = 2y - 1]$

230 $2x - 3y + 6 = 0$ y $\left[y = \frac{2}{3}(x + 3)\right]$

231 $Q = mc(t_2 - t_1)$ m $\left[m = \frac{Q}{c(t_2 - t_1)}\right]$

232 $Q = mc(t_2 - t_1)$ t_2 $\left[t_2 = \frac{cmt_1 + Q}{cm}\right]$

238 $xy - yz = x - y$ y $\left[y = \frac{x}{x - z + 1}\right]$

239 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ n $\left[n = 1 + \frac{a_n - a_1}{d}\right]$

240 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ d $\left[d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}\right]$

241 $\Delta L = \lambda L_0(T_1 - T_0)$ T_0 $\left[T_0 = T_1 - \frac{\Delta L}{\lambda L_0}\right]$

242 $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ x $\left[x = \frac{b - dy}{cy - a}\right]$

243 $z = \frac{a - b}{a + b}$ b $\left[b = \frac{a(1 - z)}{z + 1}\right]$

244 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ y $\left[y = \frac{xz}{x - z}\right]$

245 $S = \frac{a}{1 - r}$ r $\left[r = 1 - \frac{a}{s}\right]$

246 $I = \frac{E}{R + r}$ R $\left[R = \frac{E}{I} - r\right]$

247 $c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ a $\left[a = \frac{b}{bc - 1}\right]$

248 $t = \frac{rs}{r - s}$ r $\left[r = \frac{st}{t - s}\right]$

249 $z = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ x $\left[x = \frac{2y}{yz - 3}\right]$

250 $r = \frac{2S}{a + b + c}$ c $\left[c = \frac{2S}{r} - a - b\right]$

Equazioni di primo grado frazionarie e letterali

1 Vero o falso?

a. L'equazione, nell'incognita x, $\frac{3x}{a-1} = \frac{a+1}{a}$ è letterale e frazionaria. V F

b. L'equazione, nell'incognita x, $\frac{3x}{a-1} = \frac{a+1}{x}$ è letterale e frazionaria. V F

c. L'equazione $\frac{3x}{x-1} = \frac{3}{x-1}$ ha come soluzione $x = 1$. V F

d. L'equazione $(a^2 - 1)x = (a+1)^2$ è impossibile per $a = 1$ e indeterminata per $a = -1$. V F

e. L'equazione $\frac{x+1}{x+1} = \frac{x-1}{x-1}$ ha come insieme delle soluzioni tutto R. V F

f. L'equazione, nell'incognita x, $\frac{1}{a-1} = \frac{a-1}{x}$ ha soluzioni per tutti i valori di a per cui le frazioni a primo e secondo membro esistono. V F

g. Se $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, le equazioni $ax = ab$ e $bx = ab$ sono equivalenti. V F

h. L'equazione, nell'incognita x, $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ ha come insieme delle soluzioni tutto R. V F

Risolvi e discuti le seguenti equazioni nell'incognita x.

2 $\frac{(px-2)(3x+p)}{6} = \frac{2px(x+p)}{4} - \frac{4x+1}{3}$

3 $\frac{x+4}{b-3} - \frac{2(x-1)}{b+2} = 1$

4 $\frac{x+6}{6x^2+4x} - \frac{10}{9x^2-4} = \frac{2}{3x} - \frac{3x+2}{6x^2-4x}$

5 Risolvi la seguente equazione nell'incognita n: $\frac{n-5}{n^2-6n+9} - \frac{1}{n-3} = \frac{3-5n}{n^3-3n^2-9n+27} + \frac{3}{n^2-9}$

6 Determina per quali valori del parametro n la seguente equazione ha per soluzione $x = 0$:

6 Determina per quali valori del parametro n la seguente equazione ha per soluzione $x = 0$:

$$\frac{14x+9}{3x-n} - \frac{21n+3}{x+2n} = \frac{14x^2+7nx}{3x^2+5nx-2n^2}$$

7 Risolvi le seguenti formule rispetto alla variabile indicata a lato:

a. $F = k_0 \frac{qQ}{r^2}$ $\quad q$ b. $l = l_0(1+\lambda t)$ $\quad \lambda$ c. $F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{r}$ $\quad r$ d. $r = \frac{2S}{a+b+c}$ $\quad b$

8 Un'auto percorre una distanza d, espressa in km, alla velocità v, espressa in km/h, in un tempo t, espresso in minuti. Di quanto dovrebbe aumentare la sua velocità, in km/h, per percorrere la stessa distanza in $t - m$ minuti? Fornisci la risposta espressa in funzione delle variabili m, v e d.

Unità 13

1. F, V, F, V, F, V, F, V **2.** Se $p \neq \pm 1$, $x = -\frac{1}{p+1}$; se $p = -1$, impossibile; se $p = 1$, indeterminata

3. Se $b \neq -2 \wedge b \neq 3 \wedge b \neq 8$, $x = -b - 1$; se $b = -2 \vee b = 3$, perde significato; se $b = 8$, indeterminata **4.** $\frac{1}{3}$

5. $R - \{-3, 3\}$ **6.** $n = -1$ **7.** a. $q = \frac{Fr^2}{k_0 Q}$; b. $\lambda = \frac{1}{t}\left(\frac{l}{l_0} - 1\right)$; c. $r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{F}$; d. $b = \frac{2S}{r} - a - c$

8. Indicato con x l'aumento richiesto, si può ricavare x risolvendo l'equazione $d = (v+x)\left(\frac{t-m}{60}\right)$, dove $t = \frac{60d}{v}$; si trova che $x = \frac{mv^2}{60d - mv}$. In alternativa, si può osservare che nel primo caso la velocità è $v = \frac{60d}{t}$; nel secondo caso è $v' = \frac{60d}{t-m}$; l'aumento di velocità è quindi $v' - v = \frac{60dm}{t(t-m)}$. Sostituendo $\frac{60d}{v}$ al posto di t, si ritrova il risultato precedente.