Forma algebrica

$$z = \underbrace{a}_{\text{parte reale: si indica con Re } z} + \underbrace{bi}_{\text{parte immaginaria: si indica con Im } z} \quad \text{con } a, b \in \mathbf{R}$$

Modulo

Si indica con $|z|$ ed è il numero reale non negativo così definito: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

ESEMPIO

$z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Coniugato

Si indica con $\bar{z}$ ed è il numero complesso che ha la stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta.

ESEMPIO

$z = 4 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 4 - 3i$

Forma trigonometrica

La forma trigonometrica dal numero complesso $z = a + bi$ è:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

r è il modulo di z, cioè $\sqrt{a^2 + b^2}$

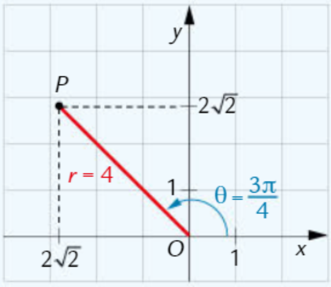
θ è l'ampiezza dell'angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ formato dall'asse x e dalla semiretta OP, essendo O l'origine e $P(a, b)$

ESEMPIO

$$\underbrace{z = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}_{\text{forma algebrica}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{z = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]}_{\text{forma trigonometrica}}$$



Prodotto e quoziente

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

allora:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{\underbrace{z_2}_{z_2 \neq 0}} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potenza

Teorema di De Moivre:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ESEMPIO

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z^3 = 2^3\left[\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$$

Radici

Se $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, le radici n-esime di w sono date dalla formula:

$$\underbrace{z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]}_{\text{si ottengono } n \text{ radici } n\text{-esime distinte ponendo } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Forma esponenziale

Se $z = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{forma trigonometrica}}$, allora $z = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{forma esponenziale}}$

I numeri complessi

Si chiama **unità immaginaria** il numero che si indica con il simbolo i e che è caratterizzato dalla relazione $i^2 = -1$. Un numero immaginario è il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria.
La somma di un numero reale con un numero immaginario dà luogo ad un **numero complesso**; un numero complesso ha quindi la forma $a + ib$.
Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione tra numeri complessi seguono le regole del calcolo algebrico letterale tenendo presente che $i^2 = -1$.
L'operazione di divisione si esegue applicando la proprietà invariantiva, moltiplicando sia il dividendo che il divisore per il complesso coniugato del divisore:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

La risoluzione delle equazioni in C

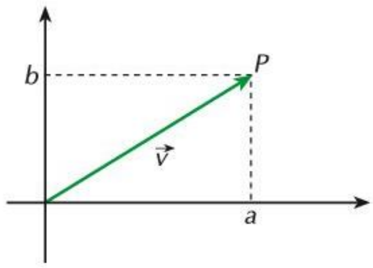
L'unità immaginaria consente di calcolare le radici quadrate dei numeri negativi: ad esempio $\sqrt{-4} = \pm 2i$
Nell'insieme dei numeri complessi un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni, se ciascuna viene contata con la sua molteplicità. In particolare, un'equazione di secondo grado ammette sempre 2 soluzioni che sono:

- reali e distinte se $\Delta > 0$
- reali e coincidenti se $\Delta = 0$
- complesse e coniugate se $\Delta < 0$.

Si può inoltre affermare che un'equazione di grado dispari ammette sempre almeno una soluzione reale.

Il piano di Gauss

Un numero complesso $z = a + ib$ si può rappresentare graficamente nel piano di Gauss riportando la parte reale a sull'asse delle ascisse (**asse reale**) e il coefficiente b della parte immaginaria sull'asse delle ordinate (**asse immaginario**). Ad ogni numero complesso z si può quindi associare un punto P di coordinate (a, b) o anche un vettore $\vec{v}$ di componenti (a, b).



La forma trigonometrica e le operazioni

Ad ogni numero complesso $z = a + ib$ si può associare una **forma trigonometrica**:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \qquad \text{con} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

dove ρ rappresenta il **modulo** del numero complesso e ϑ la sua **anomalia**.

Fra i numeri a e b della forma algebrica e quelli ρ e ϑ della forma trigonometrica sussistono le seguenti relazioni:

- a e b in funzione di ρ e ϑ: $\begin{cases} a = \rho\cos\vartheta \\ b = \rho\sin\vartheta \end{cases}$
- ρ e ϑ in funzione di a e b: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\vartheta = \dfrac{a}{\rho} \qquad \sin\vartheta = \dfrac{b}{\rho} \qquad \tan\vartheta = \dfrac{b}{a}$

Le operazioni di moltiplicazione, divisione e potenza si possono eseguire in modo semplice mediante la forma trigonometrica; dati due numeri complessi $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$

si procede in questo modo:

- **prodotto**: si moltiplicano i moduli e si sommano le anomalie $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]$
- **quoziente**: si dividono i moduli e si sottraggono le anomalie $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)]$
- **potenza** n-esima: si eleva a potenza n il modulo ρ e si moltiplica per n l'anomalia ϑ
  $z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$ (formula di De Moivre)

Le radici n-esime di un numero complesso

Ogni numero complesso $z = (\rho, \vartheta)$ ha n radici n-esime che si esprimono con la formula

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Attraverso il calcolo delle radici n-esime di un numero complesso si possono trovare le n soluzioni di un'equazione algebrica di grado n.

La forma esponenziale

Posto $e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$, un numero complesso ha anche una **forma esponenziale**: $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$
Per eseguire prodotti, quozienti e potenze di numeri complessi in forma esponenziale, si applicano le proprietà delle potenze; dati $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\vartheta_1}$ e $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\vartheta_2}$ si ha che:

- prodotto $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$
- quoziente $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$
- potenza n-esima $z^n = \rho^n \cdot e^{in\vartheta}$

Dalla forma esponenziale di un numero complesso, si ricavano le seguenti formule di Eulero:

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$