Risolvere un'equazione in $\mathbb{C}$

Risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione $x^4 + 16 = 0$.

- **Portiamo l'equazione nella forma $x^n = a$ e scriviamo a in forma trigonometrica.**

  Trasportiamo il termine noto al secondo membro: $x^4 = -16$.
  Utilizziamo la formula $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e scriviamo -16 in forma trigonometrica:

  $$-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

  Poiché $z = -16$, ricaviamo $r = 16$ e $\alpha = \pi$.

- **Calcoliamo le radici n-esime di a.**

  Le soluzioni dell'equazione sono le radici quarte di -16. Per determinarle, utilizziamo la formula:

  $$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{4}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

  Le radici quarte di -16 sono quindi date da:

  $$\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right), \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3.$$

  Per risolvere in $\mathbb{C}$ $x^4 = -16$ dobbiamo trovare quei numeri che sono, in $\mathbb{C}$, le radici quarte di -16.

- **Scriviamo le soluzioni dell'equazione.**
  - Per $k = 0$:
    $$x_0 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1 + i).$$
  - Per $k = 1$:
    $$x_1 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(-1 + i).$$
  - Per $k = 2$:
    $$x_2 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\,(1 + i).$$
  - Per $k = 3$:
    $$x_3 = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(1 - i).$$

Risolvi in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni.

332 $x^4+1=0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

333 $x^3+8=0$ $[1\pm i\sqrt{3}; -2]$

334 $x^2=-25$ $[\pm 5i]$

335 $x^6-64=0$ $[\pm 2, \pm(1+i\sqrt{3}); \pm(1-i\sqrt{3})]$

336 $x^4+64=0$ $[\pm 2(1+i); \pm 2(-1+i)]$

337 $x^2-4x+13=0$ $[2\pm 3i]$

338 $x^2-2x+5=0$ $[1\pm 2i]$

339 $x^2-6x+13=0$ $[3\pm 2i]$

340 $x^2+4x+29=0$ $[-2\pm 5i]$

341 $x^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})=0$ $\left[\pm i\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\right]$

342 $x^4+13x^2+36=0$ $[\pm 2i, \pm 3i]$

343 $x^4+6x^2+25=0$ $[\pm(1+2i), \pm(1-2i)]$

344 $x^4+23x^2-50=0$ $[\pm\sqrt{2}, \pm 5i]$

345 $x^6+7x^3-8=0$ $\left[-2, 1\pm i\sqrt{3}, 1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti complessi.

348 $x^2-6i=0$ $[\pm\sqrt{3}(1+i)]$

349 $x^3-8i=0$ $[i\pm\sqrt{3}, -2i]$

350 $x^2-2ix+3=0$ $[3i, -i]$

351 $x^2-(2+2i)x+2i-1=0$ $[i, 2+i]$

352 $x^2+\frac{(1+i)^2-11i}{3}x-2=0$ $[i, 2i]$

353 $x^2+\frac{(2-i)^2-1+4i}{i}x+3=0$ $[3i, -i]$

355 Scrivi l'equazione di secondo grado le cui radici sono $z_1=1+i$ e $z_2=2-3i$. $[x^2-(3-2i)x+5-i=0]$

IN 3 PASSI

1. Considera l'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ e utilizza le sue soluzioni z_1 e z_2 per scomporre il trinomio di secondo grado.
2. Scegli $a=1$, sostituisci z_1 e z_2 ed esegui i calcoli.
3. Osserva se ottieni un'equazione a coefficienti reali.

Scrivi le equazioni di secondo grado le cui radici sono le seguenti coppie di numeri complessi.

356 $z_1=1+i$, $z_2=2+i$. $[x^2-(3+2i)x+1+3i=0]$

357 $z_1=-1+i$, $z_2=2-i$. $[x^2-x-1+3i=0]$

358 $z_1=-1-2i$, $z_2=3+i$. $[x^2-(2-i)x-1-7i=0]$

359 $z_1=-3-2i$, $z_2=-3+2i$. $[x^2+6x+13=0]$

360 $z_1=1-i$, $z_2=-1+5i$. $[x^2-4ix+4+6i=0]$

361 $z_1=\sqrt{2}+i$, $z_2=\sqrt{2}-i$. $[x^2-2\sqrt{2}x+3=0]$

Risolvi, nel campo dei numeri complessi, le due equazioni di primo grado seguenti, scrivendo la soluzione in forma algebrica.

a. $(z+i)(z+1)=z^2+2+i$ b. $(3+i)z+\frac{2}{1-i}=4z+1$

---

a. Le proprietà delle operazioni nel campo dei numeri complessi, analoghe a quelle nel campo dei numeri reali, consentono di risolvere equazioni algebriche di primo grado (o a esse riconducibili) con le tecniche usuali. Svolgendo il prodotto a primo membro e semplificando, otterrai l'equazione $(1+i)z=2$, da cui:

$$z=\frac{2}{1+i}=\frac{2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2(1-i)}{2}=1-i$$

b. Conviene anzitutto semplificare la frazione $\frac{2}{1-i}$, che risulta uguale a $1+i$. L'equazione diviene così $(3+i)z+1+i=$ $=4z+1$, che si riconduce a $i=(1-i)z$. Puoi ora ricavare z e scrivere la soluzione in forma algebrica, procedendo in modo analogo al punto a. Otterrai come soluzione $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Risolvi in C le seguenti equazioni di primo grado o a esse riconducibili. Scrivi la soluzione in forma algebrica.

101 $iz+3(2-i)=(2-3i)z+7$ $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

102 $2-\left(\frac{2+i}{3}\right)z=i-\frac{2}{3}z$ $[-3-6i]$

103 $\frac{z}{z+i}=1-i$ $[1-i]$

104 $\frac{5}{2-i}z-2i=3z-1$ $\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

105 $\frac{4}{1-i}z=3+\frac{z}{i}$ $\left[\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i\right]$

106 $\frac{i+z}{z-(2+i)}=2$ $[4+3i]$

107 $(2z+1)(z-i)=(z+2)(2z-i)$ $\left[\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\right]$

233 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo in C l'equazione $z^2+z+1=0$.

Osserviamo che l'equazione in R non avrebbe soluzioni, perché ha discriminante negativo (uguale a -3). In C invece abbiamo:

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S=\left\{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Risolvi, nel campo complesso, le seguenti equazioni algebriche di secondo grado.

234 $z^2+4=0$ $[\pm 2i]$

235 $2z^2-6z+5=0$ $\left[\frac{3\pm i}{2}\right]$

236 $z^2-3iz+4=0$ $[-i, 4i]$

237 $iz^2+8=0$ $[-2-2i, 2+2i]$

Dopo aver risolto le seguenti equazioni nel campo complesso, controlla la correttezza delle soluzioni trovate per sostituzione diretta.

238 $z^2+10i=0$ $[-\sqrt{5}+i\sqrt{5}, \sqrt{5}-i\sqrt{5}]$

239 $(z-2i)^2+(z+i)^2=-9$ $[-i, 2i]$

240 $z(1-i)^2-(2+i)(2-i)z^2=3$ $\left[-i, \frac{3i}{5}\right]$

241 $z^2-2z+5=0$ $[1\pm 2i]$

242 $2z^2-2z+5=0$ $\left[\frac{1\pm 3i}{2}\right]$

243 $z^2-\sqrt{3}z+2=0$ $\left[\frac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{5}}{2}\right]$

244 $(z+1)^2+(z+2)^2=(z+3)^2-6$ $[\pm i\sqrt{2}]$

245 $z^2+(z+1)^2=-1$ $\left[-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

Risolvi, nel campo complesso, le seguenti equazioni algebriche di secondo grado.

234 $z^2+4=0$ $[\pm 2i]$

235 $2z^2-6z+5=0$ $\left[\frac{3\pm i}{2}\right]$

236 $z^2-3iz+4=0$ $[-i,\ 4i]$

237 $iz^2+8=0$ $[-2-2i,\ 2+2i]$

Dopo aver risolto le seguenti equazioni nel campo complesso, controlla la correttezza delle soluzioni trovate per sostituzione diretta.

238 $z^2+10i=0$ $[-\sqrt{5}+i\sqrt{5},\ \sqrt{5}-i\sqrt{5}]$

239 $(z-2i)^2+(z+i)^2=-9$ $[-i,\ 2i]$

240 $z(1-i)^2-(2+i)(2-i)z^2=3$ $\left[-i,\ \frac{3i}{5}\right]$

241 $z^2-2z+5=0$ $[1\pm 2i]$

242 $2z^2-2z+5=0$ $\left[\frac{1\pm 3i}{2}\right]$

243 $z^2-\sqrt{3}z+2=0$ $\left[\frac{\sqrt{3}\pm i\sqrt{5}}{2}\right]$

244 $(z+1)^2+(z+2)^2=(z+3)^2-6$ $[\pm i\sqrt{2}]$

245 $z^2+(z+1)^2=-1$ $\left[-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

Risolvi nel campo complesso le seguenti equazioni algebriche di secondo grado o a esse riconducibili.

246 $z^2-1+(z+2)(z+3)=2-z^2$ $\left[\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{6}\right]$

247 $z^2-z+1=0$ $\left[\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right]$

248 $(z^2+4z+5)(z^2-4z+5)=0$ $[-2\pm i;\ 2\pm i]$

249 $(z-3+i)^2=-4$ $[3-3i,\ 3+i]$

250 $(z-i)^2=(\sqrt{3}-i)^3$ $[-2+3i,\ 2-i]$

251 $(z+3i)^2=(1-i\sqrt{3})^6$ $[-8-3i,\ 8-3i]$

252 $z^2+iz+(1+i)^8-10=0$ $[-3i,\ 2i]$

253 $z^2-(1-i)^6z=-20$ $[-2i,\ 10i]$

254 $z^2+\frac{2-2i}{1+i}z+3i^2=0$ $[i\pm\sqrt{2}]$

255 $z^2+\frac{4i-2}{2+i}z-8i^2=0$ $[-4i,\ 2i]$

256 $z^4+z^2-6=0$ $[\pm\sqrt{2};\ \pm i\sqrt{3}]$

257 $z^2(z^2+5)=-6$ $[\pm\sqrt{2}i;\ \pm i\sqrt{3}]$