Disequazioni risolvibili con scomposizioni in fattori

Non disponendo di formule per la risoluzione di disequazioni ed equazioni di polinomi di grado superiore al secondo, la sola possibilità che abbiamo per risolverle è scomporre il polinomio P(x) in fattori di primo e di secondo grado.

Dato un polinomio P(x) di grado maggiore di 2, le disequazioni del tipo $P(x) > 0$ o $P(x) < 0$ sono di grado superiore al secondo e possono essere risolte scomponendo in fattori di primo e secondo grado il polinomio P(x) e studiando il segno del prodotto di polinomi che si ottiene

Esempi

Disequazione di terzo grado scomponibile in fattori

Risolviamo la disequazione $x^3 - x^2 \leq 4x - 4$.

1) Riportiamo la disequazione in forma normale:

$x^3 - x^2 - 4x + 4 \leq 0$

2) Scomponiamo il polinomio a primo membro in fattori di 1° o 2° grado:

$x^2(x - 1) - 4(x - 1) \leq 0$

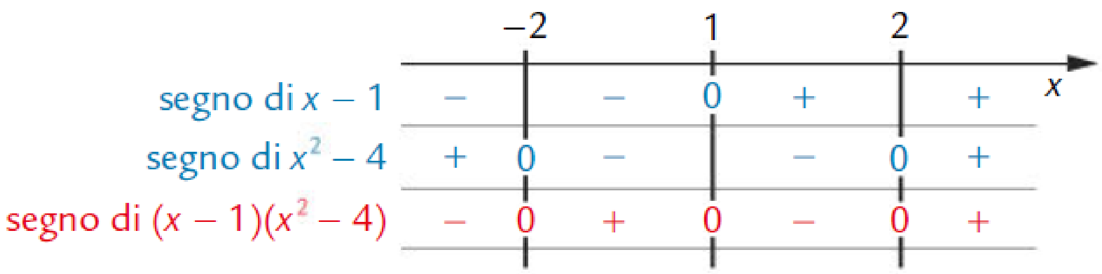
$(x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$

3) Studiamo il segno dei fattori:

1° fattore $\rightarrow x - 1 > 0 \quad \Rightarrow x > 1$

2° fattore $\rightarrow \quad x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$

4) Costruiamo la tabella dei segni:



5) La disequazione $(x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$ è soddisfatta quando il prodotto

$(x - 1)(x^2 - 4)$ è negativo o nullo, cioè per:

$x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 2$

l'insieme S delle soluzioni sulla retta reale è perciò quello nella figura seguente

Riassumiamo IL PROCEDIMENTO generale per risolvere una disequazione di grado superiore al secondo scomponibile in fattori

- PASSO 1: **riconduciamo** la disequazione IN FORMA NORMALE (se non lo è già);
- PASSO 2: **scomponiamo** il polinomio al primo membro della disequazione in fattori di primo o secondo grado (o eventualmente di grado superiore, purché ne sappiamo studiare il segno);
- PASSO 3 : **studiamo** il segno di ciascun fattore;
- PASSO 4: **costruiamo** una tabella riassuntiva in cui riportiamo il segno di ciascun fattore. In base alla regola dei segni, ricaviamo il segno del prodotto in ciascun intervallo che si individua;
- PASSO 5: **deduciamo** dalla tabella **l'insieme delle soluzioni della disequazione**

RICORDA

1. Possiamo TRASCURARE eventuali fattori **sempre positivi,** che compaiano nella disequazione ridotta in forma normale e scomposta (non influiscono sul segno del prodotto).

2. Nella costruzione della tabella finale dei segni è importante ordinare correttamente sulla retta reale gli zeri dei fattori.

3. DOBBIAMO CONSIDERARE il **simbolo (>, <, ≥, ≤) che compare nella disequazione solo** nell'ultimo passaggio. Infatti la tecnica risolutiva richiede di determinare, SEMPRE E COMUNQUE, lo schema completo del segno dell'espressione e poi dedurre, da tale schema, le soluzioni della disequazione.

ALTRI ESEMPI

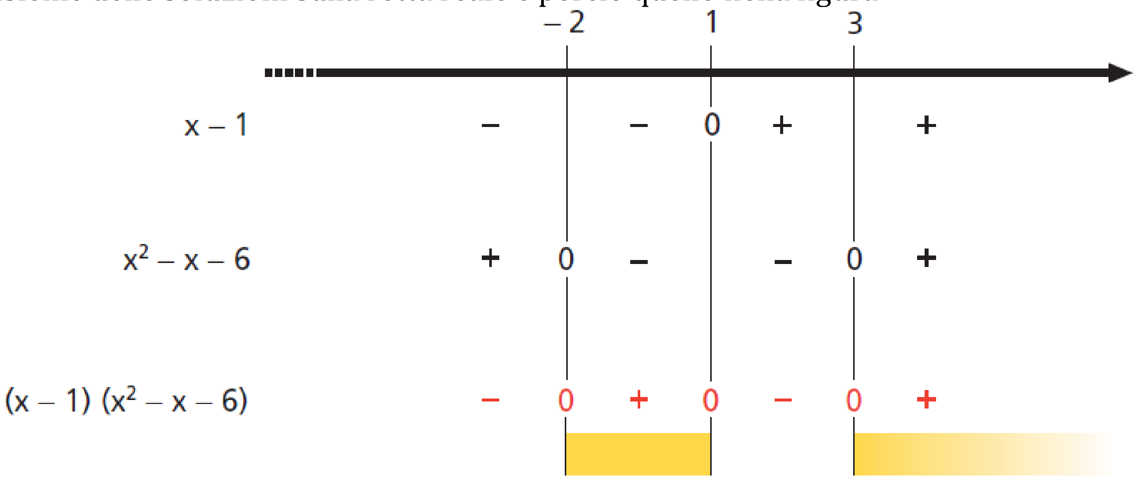
ESEMPIO 2 **Risolviamo la disequazione:**

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 > 0.$

Scomponiamo il polinomio
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
in fattori mediante la regola di Ruffini.
Se sostituiamo nel polinomio i divisori del termine noto 6, scopriamo che 1 è uno zero del polinomio.
Ricorda : se un polinomio ha zeri in Z, questi devono essere divisori del termine noto. Perciò i possibili zeri interi del polinomio sono $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
Applichiamo la regola di Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
1 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & 0
\end{array}
$$

Il nostro polinomio diventa
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.
La disequazione iniziale è equivalente a:
$(x - 1)(x^2 - x - 6) > 0$.
Studiamo il segno del polinomio iniziale esaminando il segno dei due polinomi fattori:
$x - 1 > 0$ per $x > 1$;
$x^2 - x - 6 > 0$. Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, troviamo le due radici dell'equazione associata $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$.
Di conseguenza il polinomio è positivo per valori ESTERNI all'intervallo delle radici, ovvero per $x < -2 \vee x > 3$.
l'insieme delle soluzioni sulla retta reale è perciò quello nella figura



Dal quadro dei segni della figura precedente ricaviamo che la disequazione è verificata per
$-2 < x < 1 \vee x > 3$, ossia $]-2; 1[\cup]3; +3[$.

ESEMPIO 3

Risolviamo la **disequazione biquadratica**:
$x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$.
L'equazione associata
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
è un'equazione biquadratica.
Per risolverla, introduciamo l'incognita ausiliaria
z e poniamo $x^2 = z$:
$z^2 - 13z + 36 = 0$ per $z_1 = 4$, $z_2 = 9$
RICORDA: In generale, un'**equazione biquadratica** nell'incognita x è riconducibile alla forma:
$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

La disequazione di quarto grado, nell'incognita x, è quindi equivalente alla disequazione di secondo grado, nell'incognita ausiliaria z. Otteniamo
$z^2 - 13z + 36 \geq 0$ per $z \leq 4 \vee z \geq 9$,
da cui
$x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$ per $x^2 \leq 4 \vee x^2 \geq 9$,
ossia:

$-2 \leq x \leq 2 \vee (x \leq -3 \vee x \geq 3)$.

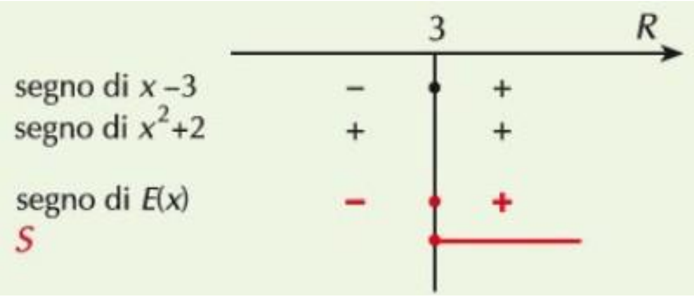
ESEMPIO 4

Risolviamo la **disequazione binomia**:
$x^3 - 8 \leq 0$.
L'equazione associata
$x^3 - 8 = 0$
è un'equazione binomia, con esponente $n = 3$ dispari. La sua soluzione è:
$x^3 = 8$, da cui $x = \sqrt[3]{8} = 2$.
La disequazione è verificata per:
$x \leq 2$, ossia $x \in]-3; 2]$.
Osservazione. Per giustificare il risultato precedente, ricordiamo che
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Quindi $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.
Inoltre il trinomio $x^2 + 2x + 4$, che ha $D < 0$, assume sempre segno positivo, e questo spiega perché il segno di $x^3 - 8$ dipende solo dal segno del fattore $(x - 2)$.

ESEMPIO 5

Risolviamo la **disequazione trinomia**:
$x^6 - 3x^3 + 2 > 0$.
L'equazione associata
$x^6 - 3x^3 + 2 = 0$
è un'equazione trinomia.
RICORDA : In generale, un'**equazione trinomia** nell'incognita x è riconducibile alla forma:
$ax^{2n} + bx^n + c = 0$,
con $a \neq 0$ e n intero positivo.
le equazioni biquadratiche sono particolari equazioni trinomie, nelle quali n = 2.
Per risolverla, introduciamo l'incognita ausiliaria z e poniamo $x^3 = z$:
$z^2 - 3z + 2 = 0$ per $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.
Come già visto in un esempio precedente, la disequazione di sesto grado, nell'incognita x, è equivalente alla disequazione di secondo grado, nell'incognita ausiliaria z.
Ricaviamo
$z^2 - 3z + 2 > 0$ per $z < 1 \vee z > 2$,
da cui
$x^6 - 3x^3 + 2 > 0$ per $x^3 < 1 \vee x^3 > 2$,
vale a dire:
$x < 1 \vee x > \sqrt[3]{2}$.
Dobbiamo ora risolvere la seguente disequazione di terzo grado
$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \geq 0$
Scomponiamo in fattori il polinomio
$E(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$
Eseguiamo un raccoglimento parziale tra i termini che lo compongono. Per la precisione, raccogliamo x^2 tra i primi due termini e +2 tra il terzo e il quarto. Otteniamo
$x^2 (x - 3) + 2 (x - 3)$
Eseguiamo ora un raccoglimento totale, ottenendo il polinomio equivalente
$E(x) = (x-3) (x^2 + 2)$
Studiamo ora il segno di ciascun fattore del prodotto, chiedendoci quando risulta positivo o nullo.
$x - 3 \geq 0$ se $x \geq 3$
invece
$x^2 + 2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo un binomio irriducibile.

Costruiamo ora la tabella dei segni, riportando sulla retta dei numeri reali il segno di ciascun fattore.



NOTA il pallino nero in corrispondenza del 3 indica che il polinomio si annulla per tale valore. Il polinomio dato E(x) risulta positivo per $x > 3$ e si annulla per $x = 3$. È invece negativo per $x<3$.

La disequazione data chiede di stabilire quando E(x) è positivo o nullo, per cui l'insieme delle soluzioni (S) è dato dall'intervallo
$x \geq 3$ ovvero per $x \in S = [3, +\infty)$

ESEMPIO 6

Risolviamo ora la disequazione di terzo grado
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \geq 0$
Osservando i termini del polinomio al primo membro, notiamo che si tratta dello sviluppo del cubo del binomio
(x-2).

La disequazione data equivale quindi alla seguente
$(x-2)^3 \geq 0$

Il segno di una potenza con esponente dispari coincide con quello della base (mentre nel caso di una potenza di esponente pari il segno è sempre positivo o nullo!)
Di conseguenza, ci basta risolvere la disequazione
$(x-2) \geq 0$
Che ha come soluzione
$x \geq 2$ ovvero $S = [2, +\infty)$

ESEMPIO 7

Vogliamo ora risolvere la seguente disequazione BIQUADRATICA
$x^4 - 6x^2 + 8 > 0$
Possiamo procedere in due modi

1) Possiamo interpretare il polinomio al primo membro come un TRINOMIO CARATTERISTICO nell'incognita x2. otteniamo così il polinomio
$E(x) = (x^2 - 4)\ (x^2 - 2)$

Studiamo il segno dei due fattori fattori del prodotto, chiedendoci quando risulta positivo o nullo.
Otteniamo

$x^2 - 4 > 0$ per valori esterni all'intervallo delle radici, ossia per $x<-2 \vee x> +2$

$x^2 - 2 > 0$ se $x < -\sqrt{2} \vee x > +\sqrt{2}$

Costruiamo ora la tabella dei segni, riportando sulla retta dei numeri reali il segno di ciascun fattore.

		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2		R
segno di $x^2 - 4$	+		−		−		−		+	
segno di $x^2 - 2$	+		+		−		+		+	
segno di $E(x)$	**+**		**−**		**+**		**−**		**+**	
S										

Il polinomio E(x) risulta positivo per $x < -2$, $-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}$ e per $x > 2$.

La disequazione data chiede di stabilire quando E(x) è positivo, per cui l'insieme delle soluzioni (S) è dato dall'unione dei tre intervalli trovati

$S = (-\infty, -2) \cup (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) \cup (2, +\infty)$

2) Come in un precedente esempio, possiamo risolvere la disequazione ponendo $x^2 = t$. Otteniamo così una disequazione di secondo grado

$$t^2 - 6t + 8 > 0$$

Applicando la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado all'equazione associata, otteniamo le due radici

$t_1 = 2$ e $t_2 = 4$

La disequazione è quindi positiva per valori esterni all'intervallo delle radici, ovvero è soddisfatta per

$t < 2 \vee t > 4$

Operando la sostituzione inversa, otteniamo

$x^2 < 2 \vee x^2 > 4$

da cui

$-\sqrt{2} < x < +\sqrt{2} \vee x < -2 \vee x > 2$.

Ovvero le stesse soluzioni trovate con il primo metodo

GLI ERRORI DA EVITARE

1) MAI SEMPLIFICARE I DUE MEMBRI DI UNA DISEQUAZIONE PER UN FATTORE DI CUI NON CONOSCIAMO IL SEGNO

Ad esempio

- $(x-2)(x^2-x) > 3(x-2)$ **non** è equivalente a $x^2 - x > 3$
- $\dfrac{x-1}{2x+3} < 2(x-1)$ **non** è equivalente a $\dfrac{1}{2x+3} < 2$
- Possiamo invece dire che, nell'ipotesi che sia $x \neq 3$

  $\dfrac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x^2-4)} > 3$ è equivalente a $\dfrac{2x+1}{x^2-4} > 3$

  perché il quoziente $\dfrac{x-3}{x-3}$ è sempre uguale a 1 qualunque sia il segno d $x - 3$.

2) OGNI FATTORE della disequazione deve avere la PROPRIA RETTA: non dobbiamo MAI riportare su due rette diverse i segni dello stesso fattore

Ad esempio, risolvendo la disequazione
(x-1) (x^2-4) >0
Troviamo che
x-1>0 se x>1
(x^2-4) >0 se x<-2 ∨ x > 2

3) Se la disequazione è FRAZIONARIA, dopo aver calcolato il DENOMINATORE COMUNE e aver svolto i calcoli, NON DOBBIAMO MAI ELIMINARE I DENOMINATORI che contengono l'incognita, se non DOPO averne studiato il segno
Ad esempio

$(x-2)(x^2-x) > 3(x-2)$ **non** è equivalente a $x^2 - x > 3$

$\dfrac{x-1}{2x+3} < 2(x-1)$ **non** è equivalente a $\dfrac{1}{2x+3} < 2$

Possiamo invece dire che, nell'ipotesi che sia $x \neq 3$

$\dfrac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x^2-4)} > 3$ è equivalente a $\dfrac{2x+1}{x^2-4} > 3$

perché il quoziente $\dfrac{x-3}{x-3}$ è sempre uguale a 1 qualunque sia il segno di $x-3$.

4) Nel caso che nel verso di una disequazione FRAZIONARIA sia COMPRESO anche il SEGNO DI UGUAGLIANZA, il simbolo va messo NELLO STUDIO DEL NUMERATORE MA NON IN QUELLO DEL DENOMINATORE. Ad esempio

$\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x} \geq 0$ **non** si può scrivere $x^2 + x \geq 0$

ma si deve scrivere:

- $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ per il numeratore
- $x^2 + x > 0$ per il denominatore